Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10
15./18. Januar 2010

# 9. Übungsblatt zur „Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE“

## Wiederholungsaufgaben

**Aufgabe W9** (Fakultät und Binomialkoeffizient)

(a) Wiederholen Sie die Begriffe *Fakultät* und *Binomialkoeffizient* an folgenden Beispielen:

i. 0!, 1!, 2!, 3!, 4! und 5!, wobei $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ und $0! = 1$

ii. $\binom{4}{3}$ und $\binom{7}{3}$, wobei $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(b) Zeigen Sie die Identität $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

(c) Wie lassen sich die Binomialkoeffizienten mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks berechnen?

**Aufgabe W10** (Binomischer Lehrsatz)

Berechnen Sie mit Hilfe der binomischen Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

die Ausdrücke $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ und $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

## Multiple-Choice-Aufgaben

**Aufgabe M1** (Orthogonale Vektoren)

Wie viele der folgenden vier Aussagen sind wahr? Für orthogonale Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt stets:

- $\vec{x} \cdot \vec{y}^T = 0$
- $\vec{x}^T \cdot \vec{y} = 0$
- $\vec{x} = \vec{y}$
- $\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2$.

☐ keine ☐ eine ☐ zwei ☐ drei

**Aufgabe M2** (Ebenen und Normalenvektoren)

Für die Schnittmenge $S$ dreier Ebenen in $\mathbb{R}^3$ gilt:

☐ Wenn $S$ eine Gerade ist, dann sind zwei der Ebenen parallel.

☐ Wenn $S$ eine Gerade ist, dann sind die Normalenvektoren der drei Ebenen linear abhängig.

☐ Wenn zwei Ebenen parallel sind, dann ist $S$ eine Gerade.

☐ Wenn die Normalenvektoren der drei Ebenen linear abhängig sind, dann ist $S$ eine Gerade.

## Gruppenübung

**Aufgabe G33** (Geometrische Reihe)

Wiederholen Sie den Begriff *Geometrische Reihe*. Finden Sie in den folgenden Darstellungen jeweils eine geometrische Reihe wieder, und berechnen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte:

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 5}{3^{k+1}}$ (b) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^{k+1}}{3^k}$.

**Aufgabe G34** (Partialbruchzerlegung und Teleskopreihe)

(a) Berechnen Sie die Koeffizienten $a$ und $b$ in der Darstellung $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2}$, $k \in \mathbb{N}$.

(b) Bestätigen Sie damit den Grenzwert der Teleskopreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{4}$.

**Aufgabe G35** (Konvergenz von Reihen)

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{2k^2}$ (c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$ (d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ (e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2+e^k}$.

**Aufgabe G36** (Umkehrfunktionen)

Berechnen Sie für folgende bijektive Funktionen die Umkehrfunktionen sowie die zu den Umkehrfunktionen gehörigen Definitionsbereiche:

(a) $f(x) = -2x + 1$ (b) $g(x) = \frac{x+1}{x}$ (c) $h(x) = e^{3x} - 4$.

## Hausübung

**Aufgabe H28** (Geometrische Reihe) (4 Punkte)

Finden Sie in den folgenden Darstellungen eine geometrische Reihe wieder, und berechnen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte:

(a) $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{4^{2k-2} \cdot 7^{-k+1}}{2^{k-2}}$ (b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{3k}$, für $x \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe H29** (Konvergenz von Reihen) (4 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k^{10}}$ (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k$ (c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1+2k}{1+k^2}$ (d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{1+k}$ (e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1+3k^4}{2+8k^7}$.

**Aufgabe H30** (Umkehrfunktionen und Verkettungen) (4 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ und } g(x) = x + 3, \text{ definiert auf } D_f = D_g = (0, +\infty).$$

(a) Skizzieren Sie $f$ und $g$. Untersuchen Sie die Funktionen auf Monotonie und Injektivität.

(b) Bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktionen. Skizzieren Sie diese.

(c) Bilden Sie die Verkettung $h = f \circ g$. Untersuchen Sie auch diese auf Monotonie und Injektivität, und bilden Sie auf direktem Wege ihre Umkehrfunktion.

(d) Für die Umkehrfunktion $h^{-1}$ von $h = f \circ g$ gilt $h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Verifizieren Sie daran Ihr Resultat aus (c).