Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10

Probeklausur „Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE“

Name: .... | Fachrichtung: ....

Vorname: .... | Wiederholer: ....

Matrikelnummer: ....

Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend nummerieren und am Schluss der Klausur in dieses Deckblatt einlegen und mit diesem persönlich abgeben.

Aufgabe	1	$\sum$	Note
Punktzahl	42	42	
erreichte Punktzahl			

Hilfsmittel: *Als Hilfsmittel sind 4 A4-Blätter mit eigen-handschriftlichen Aufzeichnungen zugelassen.*

Geben Sie bitte **sämtliche** *Zwischenergebnisse bei der Lösung der Aufgaben an. Rechnen Sie, wenn nicht anders verlangt, mit Brüchen, Wurzeln usw.*

Hinweis zur Klausur: *Die Klausur wird der Probeklausur vom Umfang und Schwierigkeit in etwa entsprechen.*

1. Aufgabe (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der linearen Gleichungssysteme

$$A\vec{x} = \vec{b_1} \quad \text{und} \quad A\vec{x} = \vec{b_2},$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt.

2. Aufgabe (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_2 - x_3 &= -2 \\ x_1 + 4x_2 + \alpha^2 x_3 &= \alpha \end{aligned}$$

in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Gegeben sei die Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ r, \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

in $\mathbb{R}^3$.
Bestimmen Sie eine implizite Form der Ebene E.

(b) Gegeben sei die Gerade

$$G = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \, 2x_1 + 3x_2 = 5\}$$

in $\mathbb{R}^2$.
Bestimmen Sie eine Parameterform der Geraden G.

4. Aufgabe (10 Punkte)

Gegeben sei die Ebene

$$E := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ r, \, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene.

(b) Bestimmen Sie den Abstand der Ebene zum Ursprung.

(c) Liegt der Punkt $P := (2, \, -1, \, -2)^T$ in der Ebene E?

5. Aufgabe (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

(b) Hat das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ für jedes $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ eine Lösung?

(c) Bestimmen Sie den Eigenraum zum Eigenwert -1.

6. Aufgabe (10 Punkte)

Sei φ die Drehung des $\mathbb{R}^2$ um den Ursprung mit Winkel $90°$ und ψ die Spiegelung an der x_2-Achse. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\varphi \circ \psi$ bezüglich der Standardbasis.