Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 09/10
18. Dezember 2009/11. Januar 2010

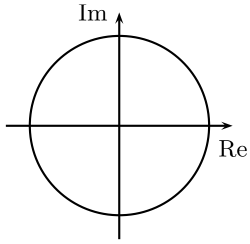
8. Übungsblatt zur „Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE“

Gruppenübung

Aufgabe G27 (Zum Einstieg in die komplexen Zahlen)

(a) Vervollständigen Sie folgende Tabelle:

z	1	i	-1	$-i$
$\mathrm{Re}(z)$				
$\mathrm{Im}(z)$				
$\arg(z)$				



und tragen Sie die Zahlen in die vorgefertigte Skizze ab.

(b) Bestimmen Sie Betrag und Argument folgender komplexer Zahlen:
i. $z = -1,5i$ ii. $z = 2 - 2i$ iii. $z = 2e^{i\pi}$.

(c) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:
i. $z = \frac{5}{1-3i}$ ii. $z = \frac{4+i}{1-i} + 7i$ iii. $z = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

Aufgabe G28 (Wurzeln komplexer Zahlen)

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungen unter Zuhilfenahme der Darstellung $z = re^{i\varphi}$. Skizzieren Sie Ihre Lösungen jeweils in der komplexen Zahlenebene.

(a) $z^2 = -9$ (b) $z^3 = 8i$ (c) $\frac{z-1}{2} = \frac{\frac{i}{2}}{z+1}$ $(z \neq -1)$

Aufgabe G29 (Konvergenz und bestimmte Divergenz)

(a) Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n}{2n+1}$ gegen $g = \frac{1}{2}$ konvergiert.

(b) Beweisen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert.

Aufgabe G30 (Konvergenzuntersuchung I)

Untersuchen Sie nachstehende Folgen auf Konvergenz:

(a) $a_n = -3n + 2$
(b) $b_n = \frac{4n^3+7n+1}{13n^2-1}$
(c) $c_n = \frac{2n^4+2n^3+4n}{4n^{12}+3n^3-n^2+1}$
(d) $d_n = \left(1 + \frac{1}{7n+1}\right)^{1000}$
(e) $e_n = 3^n - 1$
(f) $f_n = \frac{1}{2^n+1}$
(g) $g_n = \frac{2^n+1}{2^{2n}-1}$
(h) $h_n = \sqrt{n+1}$
(i) $i_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$
(j) $j_n = \sqrt[n]{23} + \frac{1}{n}$.

Aufgabe G31 (Eigenschaften von Folgen)

Geben Sie jeweils ein Beispiel einer Folge $(a_n)_n$ mit nachstehenden Eigenschaften:

(a) $(a_n)_n$ ist monoton steigend und besitzt den Grenzwert 2.

(b) $(a_n)_n$ ist monoton fallend, es gilt $2 < a_n \leq 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und sie besitzt den Grenzwert 2.

(c) $(a_n)_n$ ist alternierend, beschränkt und divergent.

(d) $(a_n)_n$ ist alternierend und konvergent.

Aufgabe G32 (Konvergenzuntersuchung II)

Untersuchen Sie nachstehende Folgen auf Konvergenz:

(a) $a_n = \sqrt{n^2+7} - n$ (b) $b_n = \sqrt{4n^2+n} - 2n$ (c) $c_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}$.

(Hinweis: Es ist $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$.)

Hausübung

Aufgabe H23 (Komplexe Polynome) (2 Punkte)

Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Gleichung $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$ mit reellen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch $\overline{z}$ Lösung der Gleichung ist.

Aufgabe H24 (Wurzeln komplexer Zahlen) (2 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 + 81i = 0$ unter Zuhilfenahme der Darstellung $z = re^{i\varphi}$. Skizzieren Sie Ihre Lösungen in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe H25 (Geraden und Kreise in der komplexen Zahlenebene) (4 Zusatz - Punkte)

Seien $s, t \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{C}$ mit $a\overline{a} - st > 0$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $sz\overline{z} + \overline{a}z + a\overline{z} = 0$

(a) für $s = 0$ eine Gerade

(b) für $s \neq 0$ einen Kreis

in der komplexen Ebene beschreibt. Bestimmen Sie in (b) insbesondere Mittelpunkt und Radius des Kreises.

Aufgabe H26 (Konvergenzuntersuchung I) (4 Punkte)

Untersuchen Sie auf Konvergenz:

(a) $a_n = \sqrt{n + \sqrt{2n}} - \sqrt{n}$ (b) $b_n = \frac{4n^3-10n^2+5}{(2n+1)^3} \cdot \frac{\sqrt[n]{n!}}{5+3n}$ (c) $c_n = \left(1 - \frac{x^2}{2n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe H27 (Konvergenzuntersuchung II) (4 Punkte)

Untersuchen Sie nachstehende Folge auf Monotonie und Konvergenz:

$$a_n = \frac{1}{2n^2+n} + \frac{2}{2n^2+n} + \frac{3}{2n^2+n} + \cdots + \frac{n}{2n^2+n} = \frac{1}{2n^2+n} \sum_{k=1}^{n} k.$$

(Hinweis: Wie kann man die Summe $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ in kompakter Form darstellen?)

Folgende Grenzwerte sollten Sie kennen:

$\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$ $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$ $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\frac{a^n}{n!} \longrightarrow 0$ $\frac{n^n}{n!} \longrightarrow \infty$ $\frac{a^n}{n^k} \longrightarrow \infty$ ($a > 1$, k fest) $\frac{a^n}{n^k} \longrightarrow 0$ ($0 < a < 1$, k fest)

$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \longrightarrow e$ Stirlingsche Formel: $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.