Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10
7./11. Dezember 2009

# Wiederholungsübung zur „Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE“

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** (Geradenscharen und Ebenen)

Für $t \in \mathbb{R}$ seien die beiden Geradenscharen

$$g_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5+t \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ -t \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R}$$

im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Untersuchen Sie für beide Geradenscharen, ob die zu der Schar gehörenden Geraden jeweils in einer gemeinsamen Ebene liegen.

**Aufgabe G2** (Lineare Unabhängigkeit)

Zeigen Sie, dass je drei paarweise verschiedene Vektoren aus der Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \in \mathbb{R} \right\}$ linear unabhängig sind.

**Aufgabe G3** (Determinante und Spur)

Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie jeweils die Determinante und die Spur der Matrizen $A$, $B$, $2 \cdot A$, $3 \cdot A$, $A + B$ und $A \cdot B$. Was fällt Ihnen auf?

**Aufgabe G4** (Determinante, Rang und Invertierbarkeit einer Matrix)

(a) Begründen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ genau dann vollen Rang hat, wenn für ihre Determinante $\det(A) \neq 0$ gilt.

(b) Begründen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ genau dann invertierbar ist, wenn sie vollen Rang hat.

(c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Begründen Sie, dass das Gleichungssystem $Ax = b$ genau dann für jede rechte Seite $b \in R^n$ eindeutig lösbar ist, wenn $A$ invertierbar ist. Wie sieht in diesem Fall die Lösung des Gleichungssystems aus?

(d) Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ und der Vektor $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie mit Hilfe der Determinante von $A$, dass $A$ invertierbar ist und berechnen Sie die Inverse $A^{-1}$ von $A$. Berechnen Sie mit Hilfe der Inversen die nach c) eindeutige Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$.

**Aufgabe G5** (Verkettung von linearen Abbildungen)

Gegeben seien die Punkte $P = \left(0,\, 0\right)^T$, $Q = \left(2,\, 0\right)^T$ und $R = \left(1,\, 1\right)^T$, die die Eckpunkte des Dreiecks $\Delta$ in $\mathbb{R}^2$ bilden.

Sei $T_A$ die durch die Matrix $A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ gegebene lineare Abbildung.

(a) Berechnen Sie das Bilddreieck $\Delta'$ von $\Delta$ unter $T_A$ und skizzieren Sie $\Delta$ und $\Delta'$ in einem Koordinatensystem.

(b) Berechnen Sie die Determinante von $A$, sowie die Flächeninhalte der Dreiecke $\Delta$ und $\Delta'$.

(c) Wie lässt sich die durch $A$ gegebene lineare Abbildung geometrisch beschreiben? Fassen Sie $T_A$ als Hintereinanderausführung von zwei elementaren geometrischen Abbildungen auf und geben Sie für die zugehörigen linearen Abbildungen $T_B$ und $T_C$ die jeweiligen Abbildungsmatrizen $B$ und $C$ an.

(d) Berechnen Sie die beiden Matrixprodukte $B \cdot C$ und $C \cdot B$. Was fällt Ihnen auf?

**Aufgabe G6** (Basiswechsel bei linearen Abbildungen)

Sei $T_S$ die lineare Abbildung, die einen Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ an der Ebene $E : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ spiegelt.

(a) Bestimmen Sie eine möglichst geeignete Basis $B' = (b'_1,\, b'_2,\, b'_3)$ des $\mathbb{R}^3$, um die zu $T_S$ gehörige Abbildungsmatrix $S_{B'}$ bezüglich $B'$ anzugeben. (Hinweis: Überlegen Sie sich, welche Vektoren von der linearen Abbildung unverändert gelassen werden, und welche Rolle der Normalenvektor der Ebene spielt.)

(b) Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrix $V$, welche die oben gewählte Basis in die Standardbasis $B$ des $\mathbb{R}^3$ transformiert, sowie ihre Inverse $V^{-1}$.

(c) Bestimmen Sie die zu $T_S$ gehörige Abbildungsmatrix $S_B$ bezüglich $B$.

**Aufgabe G7** (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, sowie die Matrizen $A_\lambda = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 4 & 5-\lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie die Determinante von $A_\lambda$ in Abhängigkeit von $\lambda$. (Das so erhaltene Polynom in $\lambda$ heißt *charakteristisches Polynom* der Matrix A.)

(b) Bestimmen Sie diejenigen Werte von $\lambda$, für die $\det(A_\lambda) = 0$ gilt. (Diese Werte von $\lambda$ heißen *Eigenwerte* der Matrix A.)

(c) Bestimmen Sie für die in b) erhaltenen Werte von $\lambda$ die Kerne der zugehörigen Matrizen $A_\lambda$. (Dies sind die sogenannten *Eigenräume* der Matrix A.)

(d) Verifizieren Sie, dass für einen Vektor $v$ aus dem Kern der Matrix $A_\lambda$ gilt: $Av = \lambda v$. (Ein solcher Vektor $v$ heißt *Eigenvektor* der Matrix $A$ zum Eigenwert $\lambda$.)