Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 4./14. Dez. 2009

Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE

7. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe 24 (Spiegelung in $\mathbb{R}^2$) Der Punkt $\vec{x} = (1,2)^T$ werde an der y-Achse gespiegelt. Als Bild erhalte man $\vec{y}$.

(i) Bestimmen Sie $\vec{y}$ anhand einer Skizze.

(ii) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A aus den Bildern der Basisvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.

(iii) Überprüfen Sie, ob es sich um eine Spiegelung handelt, d.h. ob gilt $A^2 = E$.

Aufgabe 25 (Eigenwerte und Eigenvektoren) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie Spur und Determinante dieser Matrix.

(ii) Stellen Sie das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ auf, und bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2. Wo finden Sie im Polynom $p(\lambda)$ die Spur und die Determinante der Matrix wieder?

(iii) Bestimmen Sie zu den Eigenwerten jeweils die Eigenvektoren und die zugehörigen Eigenräume $\{\vec{x} \,:\, A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$.

Aufgabe 26 (Basisdarstellung von Vektoren und linearen Abbildungen) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Basis gegeben

$$\mathcal{B} = \left\{\vec{b}_1 = (1,0,1)^T,\ \vec{b}_2 = (-1,2,1)^T,\ \vec{b}_3 = (-2,-2,2)^T\right\}$$

sowie ein Vektor

$$\vec{x}_1 = (1,0,-3)^T$$

(i) Begründen Sie zunächst, dass $\mathcal{B}$ tatsächlich eine Basis darstellt.

(ii) Bestimmen Sie die Darstellung $\vec{y}_1$ des gegebenen Vektors $\vec{x}_1$ bez. der Basis $\mathcal{B}$.

Ferner sei der Vektor $\vec{y}_2$ gegeben durch

$$\vec{y}_2 = (1,0,1)^T \quad \text{bez. der Basis } \mathcal{B}.$$

(iii) Bestimmen Sie die Darstellung $\vec{x}_2$ dieses Vektors $\vec{y}_2$ bez. der Standardbasis.

Betrachten Sie nun die lineare Abbildung

$$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} \quad \text{gegeben durch } \vec{x} \mapsto \vec{b}_1 \times \vec{x}$$

mit obigem Basisvektor $\vec{b}_1$.

(iv) Begründen Sie, dass diese Abbildung tatsächlich linear ist.

(v) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A dieser Abbildung.

(vi) Stellen Sie schließlich A in der Basis $\mathcal{B}$ dar, d.h. bestimmen Sie $\widetilde{A} = B^{-1} \cdot A \cdot B$ für die Basistransformationsmatrix B.

Hausübungen

Abgabe am 18. Dezember 2009, bzw. am 11. Januar 2010 in den Übungen.

Aufgabe H19 (4 Punkte) *Eigenwerte und Eigenvektoren* Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Stellen Sie das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ auf, und bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(ii) Bestimmen Sie zu den Eigenwerten jeweils die zugehörigen Eigenräume.

Aufgabe H20 (4 Punkte) *Spiegelung in* $\mathbb{R}^2$

(i) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A zur Spiegelung des $\mathbb{R}^2$ an der Geraden g : $2x + y = 0$. Fertigen Sie dazu eine Skizze an. Ist A orthogonal? Ermitteln sie $\det(A)$.

(ii) Bestimmen Sie das Spiegelbild $\widetilde{\triangle}$ des Dreiecks $\triangle$ mit den Eckpunkten $P = (1, 0)^T$, $Q = (0, 1)^T$ und $R = (1, 1)^T$. Wie lauten die Bilder dieser Eckpunkte? Fertigen Sie auch hier eine Skizze an.

Aufgabe H21 (4 Punkte) *Drehungen in* $\mathbb{R}^3$ *und Basiswechsel* Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ (bez. der Standardbasis) der Drehung des $\mathbb{R}^3$ um den Winkel $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ um die Drehachse $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Ergänzen Sie $\vec{v}_1$ zu einer Basis $\mathcal{B} := \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ aus orthogonalen Einheitsvektoren.

(ii) Wie lautet die Abbildungsmatrix $\widetilde{A}$ der Drehung bez. dieser Basis $\mathcal{B}$?

(iii) Zeigen Sie, dass $\widetilde{A}$ eine orthogonale Matrix ist.

(iv) Wie berechnet sich nun A aus $\widetilde{A}$ und der Basistransformationsmatrix B, welche $\mathcal{B}$ in die Standardbasis übersetzt? Berechnen Sie A exakt oder näherungsweise.

Aufgabe H22 (4 Zusatzpunkte) *Lineare Abbildungen und Basiswechsel* Betrachten Sie die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$\varphi((1,3)^T) = 4 \cdot (1,3)^T\,, \quad \varphi((1,1)^T) = -(1,1)^T\,. \qquad (*)$$

(i) Bestimmen Sie (*ohne* explizite Rechnung!) eine Basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ des $\mathbb{R}^2$, bez. welcher sich die Abbildungsmatrix C dieser Abbildung in Diagonalgestalt schreiben lässt.

(ii) Bestimmen Sie nun die Abbildungsmatrix A der linearen Abbildung bez. der Standardbasis.

(iii) Berechnen Sie nun $\varphi(2, 0)$, und zwar

(a) indem Sie zunächst $(2, 0)^T = 3(1, 1)^T - (1, 3)^T$ benutzen und anschließend $\varphi(2, 0)$ aus $(*)$ sowie der Linearität von φ ermitteln;

(b) indem Sie zweitens Ihr Resultat aus Aufgabenteil (ii) verwenden und $\varphi(2, 0)$ direkt aus einer Matrizenmultiplikation gewinnen.