Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 27./30. Nov. 2009

Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE

6. Übung

Wiederholungsaufgaben

(W8) *Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen*

(i) Skizzieren Sie die Funktionengraphen von $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ und $\cot x$ für $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

(ii) Auf welchen Teilintervallen existieren die Umkehrfunktionen $\arcsin x$, $\arccos x$ usw?

(iii) Skizzieren Sie jeweils den Funktionengraphen dieser Umkehrfunktionen.

Gruppenübungen

Aufgabe 19 (Inverse von 2×2 Matrizen) Gegeben sei die allgemeine 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $\det A = ad - bc \neq 0$.

(i) Verifizieren Sie

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(ii) Was passiert im Fall $ad = bc$?

(iii) Ermitteln Sie speziell, ob folgende Matrizen invertierbar sind und berechnen Sie ggf. die Inversen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 20 (Inverse von 3×3 Matrizen) Bestimmen Sie, ob folgende Matrizen invertierbar sind und berechnen Sie in diesem Fall die Inverse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 21 (Drehungen in der Ebene $\mathbb{R}^2$)

(i) Wie wurde in der Vorlesung eine Drehmatrix $D(\varphi) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit Drehwinkel $\varphi \in \mathbb{R}$ definiert?

(ii) Bestimmen Sie das Bild $D(\varphi) \cdot \vec{x}$ des Vektors $\vec{x} = (-1, 2)^T$ nach Drehung um die Drehwinkel $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

(iii) Bestimmen Sie – *ohne* explizite Rechnung – die Abbildungsmatrix $M(\varphi)$ der Umkehrabbildung einer Drehung des $\mathbb{R}^2$ um den Winkel φ. Verdeutlichen Sie sich insbesondere die Identität

$$M(\varphi) = D(\varphi)^{-1}\,.$$

Aufgabe 22 (Orthogonale Projektion auf eine Gerade) Gegeben sei die Gerade $g : \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$ im $\mathbb{R}^3$.

(i) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix P der orthogonalen Projektion auf g, sowie deren Rang.

(ii) Bestimmen Sie den Abstand $d(\vec{x}, g)$ des Punktes $\vec{x} = (-10, -1, 3)^T$ zur Geraden g.

Aufgabe 23 (Zusammengesetzte lineare Abbildungen) Wir betrachten die lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ in z-Richtung auf die x-y-Ebene projeziert und anschließend um die z-Achse um $90°$ dreht.

(i) Finden Sie die Abbildungsmatrix C für diese lineare Abbildung T.

(ii) Finden Sie die Abbildungsmatrizen A für die orthogonale Projektion auf die x-y-Ebene und B für die Drehung um $90°$ um die z-Achse.

(iii) Berechnen Sie AB und BA.

(iv) Wir erwarten $C = BA$, erklären Sie geometrisch, warum auch $C = AB$ gilt.

(v) Gilt immer $BA = AB$ für Abbildungsmatrizen, die eine zusammengesetzte lineare Abbildung beschreiben?

Hausübungen

Abgabe am 4. Dezember bzw. am 14. Dezember in den Übungen.

Aufgabe H16 (4 Punkte) *Berechnung inverser Matrizen und lineare Gleichungssysteme*

(i) Bestimmen Sie – falls möglich – die Inversen folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(ii) Lösen Sie nun unter Verwendung Ihrer Resultate die linearen Gleichungssysteme

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H17 (4 Punkte) *Drehungen in* $\mathbb{R}^3$

(i) Zeigen Sie, daß

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

eine Drehmatrix ist.

(ii) Bestimmen Sie den Drehwinkel φ.

(iii) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{v}$, welcher die Drehachse erzeugt, mit $v_3 = 3 + 2\sqrt{2}$.

Aufgabe H18 (4 Punkte) *Orthogonale Projektion auf eine Ebene* Gegeben sei die Ebene $E\,:\,\lambda(1,0,-1)^T + \mu(1,-2,1)^T$ in Parameterform.

(i) Bestimmen Sie einen Normalenvektor $\vec{n}$ zur Ebene.

(ii) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der orthogonalen Projektion P auf E, sowie deren Rang.

(iii) Berechnen Sie den Abstand $d(\vec{x}, E)$ des Punktes $\vec{x} = (2,-2,3)^T$ zur Ebene E.