Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 20./23. Nov. 2009

Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE

5. Übung

Wiederholungsaufgaben

Die Logarithmusfunktion

Für reelles $a > 0$, $a \neq 1$, ist der *Logarithmus* $\log_a$ *zur Basis* a definiert als

$$\log_a x = y \quad \text{genau dann, wenn } a^y = x \quad \text{für } x > 0.$$

Der Logarithmus zur Basis $e = 2.71\ldots$ heißt *natürlicher Logarithmus* und wird mit ln bezeichnet.
Der Logarithmus zur Basis $a = 10$ heißt *dekadischer Logarithmus.*

(W5) Berechnen Sie den Wert von x aus folgenden Gleichungen:

(i) $\log_{\frac{1}{2}} 256 = x^3$ (ii) $\log_x 2 = -\frac{2}{3}$

(W6) Skizzieren Sie die Funktionen

(i) $\ln x$ für $x > 0$ (ii) $\ln |x|$ für $x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$

(W7) Zeigen Sie

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

und daraus folgend

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}\,; \quad \text{insbesondere gilt also für } b = e: \ \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}\,.$$

Gruppenübungen

Aufgabe 16 (Determinanten) Berechnen Sie folgende Determinanten:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 5\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 17 (Struktur Linearer Gleichungssysteme) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 2 & 3 & 7\\ 1 & 3 & 4 & 3 & 10\\ 1 & 3 & 2 & 3 & 10\end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie Rang und Kern von A. Verifizieren Sie hieran die Identität

$$\dim \operatorname{kern}(A) + \operatorname{rang}(A) = 5.$$

(ii) Betrachten Sie nun das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit } \vec{b} = (0, 2, 4, 4)^T\,.$$

Verifizieren Sie, daß $\vec{x}_s = (1, 1, 0, 0, 0)^T$ eine spezielle Lösung dieses inhomogenen Systems darstellt. Wie erhalten Sie mit ihr die vollständige Lösungsmenge des Systems?

Aufgabe 18 (Vertauschbarkeit in Matrixprodukten) Zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 6 & 1\end{pmatrix}$$

finde man eine (3×2)-Matrix B, so daß gilt $AB = E$. Berechnen Sie schließlich das Produkt BA und vergleichen Sie. Warum gilt $(BA)^2 = (BA)$?

Hausübungen

Abgabe am 27. November bzw. am 30. November in den Übungen.

Aufgabe H13 (4 Punkte) *Berechnung von Determinanten*
Sei $t \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Berechnen Sie folgende Determinanten:

$$\det \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \ln(|\ln(\ln(\sqrt{2}))|) & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 42^{42} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & e^e & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H14 (4 Punkte) *Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme und Determinanten*
Gegeben seien die Daten

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

mit einem reellen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Entscheiden Sie unter Berechnung der Determinante $\det(A)$, für welche Zahlen $\alpha \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar ist.
Es ist dabei nicht nötig, die Lösungen explizit auszurechnen.

(ii) Betrachten wir für $\alpha = 2$ ein spezielleres Problem $A\vec{y} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$ mit $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, es sind also nur Lösungen des allgemeinen LGS interessant mit $y_1 = 0$.
Begründen Sie, daß dieses spezielle LGS eindeutig lösbar ist, obwohl $\det(A) = 0$ ist.
Es ist dabei wieder nicht nötig, die Lösungen explizit auszurechnen. Es ist aber natürlich auch nicht falsch, das LGS zu lösen.

Aufgabe H15 (4 Punkte) *Vertauschbarkeit in Matrixprodukten*
Zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

finde man die Menge aller (2×2)-Matrizen B, so dass gilt $AB = BA$.

Hinweis: *Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem* $AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *in den unbekannten Elementen von* B*.*