Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 09/10 16. November 2009

Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE

Übung

Zusatzblatt

Aufgabe 1 (Matrixmultiplikation versus Matrix-Vektormultiplikation) Denken Sie sich 3 Spaltenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ und eine 3×3 Matrix A mit verschiedenen Einträgen aus.

(a) Berechnen Sie $A\vec{v}_1, A\vec{v}_2$ und $A\vec{v}_3$.

(b) Bilden Sie aus Ihren gewählten Vektoren eine Matrix B, indem Sie diese Vektoren in die Spalten von B schreiben. Berechnen Sie $A \cdot B$. Was fällt Ihnen auf?

Denken Sie sich nun 3 Zeilenvektoren $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3 \in \mathbb{R}^3$ aus.

(c) Berechnen Sie $\vec{w}_1 A, \vec{w}_2 A$ und $\vec{w}_3 A$.

(d) Bilden Sie aus Ihren gewählten Zeilenvektoren eine Matrix C, indem Sie diese Vektoren in die Zeilen von C schreiben. Berechnen Sie $C \cdot A$. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 2 (Binomische Formeln und Matrizen) Wir wollen untersuchen, ob die (hoffentlich (noch) aus der Schule) bekannten binomischen Formeln auf Matrixmultiplikation anwendbar sind.

(a) Schreiben Sie die drei binomischen Formeln für gewöhnliche reelle Zahlen auf.

(b) Testen Sie diese Formeln für die 2×2-Matrizen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Erklären Sie Ihre Beobachtungen.

Aufgabe 3 (Lineares Gleichungssystem mit Parameter) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter sei.
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von α den Rang, den Lösungsraum des Gleichungssystems und die Dimension des Lösungsraumes.

Aufgabe 4 (Die Spur einer Matrix) Für eine 3×3 Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ definieren wir

$$\tau(A) := a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Diese Zahl heißt die *Spur der Matrix A*.
Es seien nun A und B beliebige 3×3-Matrizen und es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine beliebige Zahl.

(a) Machen Sie sich klar, daß $\tau(A + B) = \tau(A) + \tau(B)$ gilt.

(b) Machen Sie sich klar, daß $\tau(\lambda A) = \lambda\tau(A)$ gilt.

(c) Zeigen Sie, daß $\tau(A \cdot B) = \tau(B \cdot A)$ gilt.

(d) Gilt $\tau(A \cdot B) = \tau(A) \cdot \tau(B)$? Finden Sie ein Gegenbeispiel.

(e) Gilt $\tau(A^T) = \tau(A)$?

(f) Berechnen Sie $\tau(A^T \cdot A)$. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 5 (Matrizen und Flächeninhalte) Für eine 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ kennen Sie die Determinante $\det(A) = ad - bc$. Falls Sie die Determinante nicht kennen, sei das die Definition.

(a) Wählen Sie ein echtes Dreieck im $\mathbb{R}^2$, wobei ein Punkt in $(0, 0)^T$ liegen sollte. Weiter sollten die Koordinaten nicht zu kompliziert gewählt sein. Nennen wir die Ortsvektoren Ihrer gewählten Punkte $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt F_1 Ihres Dreiecks.

(b) Wählen Sie eine 2×2 Matrix A mit Determinante ungleich 0. Bestimmen Sie den Flächeninhalt F_2 des Dreieicks $(0, 0)^T, A\vec{a}, A\vec{b}$ und betrachten Sie den Quotienten $\frac{F_2}{F_1}$. Was hat dieser Quotient mit der Determinante von A zu tun?

Aufgabe 6 (Determinante und Kreuzprodukt) Es seien $\vec{x}, \vec{y}$ und $\vec{z}$ drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Wir bilden eine Matrix $A = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, wobei wir in die Spalten von A die Einträge der Vektoren schreiben. Es ist also z. B.

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ und $\vec{z}$ im $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \det(\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}).$$

(b) Es seien zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aus dem $\mathbb{R}^3$ gegeben. Zeigen Sie, daß für jeden Basisvektor $\vec{e} \in \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ gilt:

$$\det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{e}) = \langle \vec{e}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle .$$

(c) Folgern Sie aus (b), dass für alle Vektoren $\vec{v}, \vec{w}, \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle .$$