Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 13./16. November 2009

Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE

4. Übung

Wiederholungsaufgabe

(W4) *Potenz- und Wurzelfunktionen*

(i) Skizzieren Sie die Funktionengraphen der Potenzfunktionen

$$f(x) = x^p \quad \text{für } p = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, -1$$

(ii) Vervollständigen Sie:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[\cdots]{a^{\cdots}} \qquad \text{für } a \geq 0,\ m, n \in \mathbb{N},\ n \neq 0;$$

$$\frac{1}{a^p} = a^{\cdots} \qquad \text{für } a > 0,\ p > 0 \text{ bzw. } a \neq 0,\ p \in \mathbb{N};$$

$$a^p \cdot a^q = a^{\cdots},\ (a^p)^q = a^{\cdots},\ a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^{\cdots} \qquad \text{für } a, b > 0,\ p, q \in \mathbb{R}.$$

(iii) Vereinfachen Sie, so weit möglich, folgende Ausdrücke ($a, b > 0$).

(a) $\dfrac{\sqrt[2]{ab^5}}{\sqrt[4]{(2a)^2 b^6}}$ (b) $\dfrac{(3a)^2 b^3}{\sqrt{a} b^2}$ (c) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{a^6 b^3} + \sqrt{b^3}\right)^2}{b}$

Aufgabe 12 (Matrixmultiplikation) Berechnen Sie, insofern möglich, alle möglichen Produkte $A \cdot B$, $C \cdot C$ usw. zwischen folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13 (Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme) Lösen Sie folgende zwei Gleichungssysteme:

(i) $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2$ (ii) $3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \quad x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2.$

Interpretieren Sie Ihre Resultate geometrisch.

Aufgabe 14 (Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus I) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für die Daten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. Interpretieren Sie Ihre Ergebnis geometrisch.

Aufgabe 15 (Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus II) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für die Daten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

Hausübungen

Abgabe am 20. November bzw. am 23 November in den Übungen.

Aufgabe H10 (4 Punkte) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für die Daten

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

Aufgabe H11 (4 Punkte) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für die Daten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. Interpretieren Sie Ihr Resultat geometrisch.

Aufgabe H12 (4 Punkte)

(i) Bestimmen Sie alle Lösungsvektoren $\vec{x}$ des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -(1+\alpha) & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Geben Sie im Falle der Lösbarkeit die gesamte Lösungsmenge in vektorieller Form an.

(ii) Welchen Rang hat die Matrix A in Abhängigkeit von α?