Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 2. November 2009

Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE

3. Übung

Wiederholungsaufgaben

(W3) *Winkelfunktionen*

(i) Skizzieren Sie den Einheitskreis $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

(ii) Erläutern Sie anhand Ihrer Skizze den Zusammenhang zwischen Gradmaß und Bogenmaß eines in den Einheitskreis eingezeichneten Winkels α.

(iii) Kennzeichnen Sie in Ihrer Skizze den Sinus, den Kosinus und den Tangens eines Winkels.

(iv) Begründen Sie anhand Ihrer Skizze die Identität

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(v) Skizzieren Sie schließlich die Funktionen sin, cos und tan in ein Koordinatensystem. Welche Perioden für diese drei Funktionen können Sie Ihrer Skizze entnehmen?

Gruppenübungen

Aufgabe 8 (Geraden im Raum) Liegen die Punkte $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ auf der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}?$$

Aufgabe 9 (Geraden in der Ebene) Gegeben seien die Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$g_2 : x_1 + 2x_2 = 1$$

(i) Fertigen Sie eine Skizze an, und kennzeichnen Sie hierin die im folgenden gefragten geometrischen Größen.

(ii) Bestimmen Sie jeweils einen Einheitsnormalenvektor an die Geraden, und ermitteln Sie damit die Hesseschen Normalformen. Interpretieren Sie die eingehenden Größen geometrisch.

(iii) Wie lautet der gemeinsame Schnittpunkt der Geraden?

(iv) Berechnen Sie schließlich den Winkel, unter welchem sich die Geraden schneiden.

Aufgabe 10 (Abstand von Punkt und Ebene) Bestimmen Sie den jeweiligen Abstand des Punktes P von der Ebene E.

(i) $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad E : 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$

(ii) $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 11 (Abstand von Gerade und Ebene) Gegeben sei die Ebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

und die Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R},$$

$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit des jeweiligen Parameters s bzw. t den Abstand der Punkte der Geraden zur Ebene. Für welchen Parameter s_0 bzw. t_0 wird dieser Abstand minimal? Deuten Sie die Ergebnisse Ihrer Rechnungen geometrisch.

Hausübungen

Aufgabe H7 (4 Punkte) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene in Parameterform, die durch die von

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bestimmten Punkte geht. Bestimmen Sie ferner einen Einheitsnormalenvektor, und ermitteln Sie hieraus die Hessesche Normalform der Ebene. Welchen Abstand hat die Ebene vom Koordinatenursprung?

Aufgabe H8 (4 Punkte) Betrachten Sie die in Parameterform gegebene Ebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Liegt der Punkt $P := \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$ in der Ebene?

(ii) Bestimmen sie die Schnittpunkte der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit der Ebene E und deuten Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

Aufgabe H9 (4 Punkte) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene, die durch den von P bestimmten Punkt geht und senkrecht auf der Geraden g steht.

(i) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

(ii) $\vec{P} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$