Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 26. Oktober 2009

Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE

2. Übung

Wiederholungsaufgaben

(W1) *Winkel in Gradmaß und Bogenmaß*

Vervollständigen Sie folgende Tabelle:

α	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$	π		2π
$\alpha°$			$90°$		$180°$	$270°$	

Zeichnen Sie die jeweiligen Winkel am Einheitskreis ein.

(W2) *Sinus- und Kosinusfunktion*

(i) Skizzieren Sie die Funktionen sin und cos jeweils im Intervall $x \in [-2\pi, 2\pi]$. Benennen Sie anhand Ihrer Grafik die Nullstellen sowie Hoch- und Tiefpunkte der Funktionen.

(ii) Vervollständigen Sie folgende Tabelle:

α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$
$0°$	$\frac{1}{2}\sqrt{\quad}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\quad}$
$30°$	$\frac{1}{2}\sqrt{\quad}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\quad}$
$45°$	$\frac{1}{2}\sqrt{\quad}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\quad}$
$60°$	$\frac{1}{2}\sqrt{\quad}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\quad}$
$90°$	$\frac{1}{2}\sqrt{\quad}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\quad}$

Gruppenübungen

Aufgabe 5 *Rechnen mit Vektoren I*

(i) Gegeben seien die Ortsvektoren $\vec{x} = (2, -3, 1)^T$, $\vec{y} = (1, 0, -2)^T$ und $\vec{z} = (0, 2, -1)^T$.
Berechnen Sie

$$3\vec{x}\,, \quad \vec{x} + \vec{y}\,, \quad \vec{x} - 2\vec{z}\,, \quad 3\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z}\,.$$

(ii) Berechnen Sie die Länge der Ortsvektoren $\vec{x} = (8, -2, 4)^T$ und $\vec{y} = (5, 4, -6)^T$.

Aufgabe 6 *Rechnen mit Vektoren II*

(i) Gegeben seien die beiden Vektoren $\vec{e}$ und $\vec{f}$, welche die Diagonalen eines Parallelogramms bilden. Wie berechnen sich die Seitenvektoren dieses Parallelogramms aus $\vec{e}$ und $\vec{f}$?

(ii) Verifizieren Sie nun ihre Resultate am Beispiel des Parallelogramms mit

$$\vec{e} = (4, 2)^T\,, \quad \vec{f} = (1, 2)^T$$

und Mittelpunkt im Koordinatenursprung $(0, 0)^T$. Was sind also die Koordinaten der vier Eckpunkte des Parallelogramms? Berechnen Sie außerdem die Länge seiner Seiten.

Aufgabe 7 *Orthogonale Zerlegung*

(i) Es sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ein fest gewählter Vektor.
Begründen Sie, dass sich jeder beliebige Vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ in der Form

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w},$$

schreiben lässt, wobei $\vec{v}$ parallel zu $\vec{a}$ und $\vec{w}$ senkrecht zu $\vec{a}$ ist.

Hinweis: Gesucht sind also $\vec{v}$ und $\vec{w}$ in Abhängigkeit von $\vec{u}$ und $\vec{a}$.

(ii) Bestimmen Sie nun speziell $\vec{v}$ und $\vec{w}$, falls

$$\vec{u} = (1, 2, -1)^T\,, \quad \vec{a} = (2, 0, 1)^T\,.$$

Hausübungen

Aufgabe H4 (4 Punkte) *Geraden in der Ebene und im Raum*
Stellen Sie jeweils die Gleichung der Geraden in Parameterform auf, die durch die Punkte P und Q geht. Bestimmen Sie in Aufgabenteil (i) auch eine implizite Darstellung.

(i) $P = (5, -4)^T$, $Q = (9, -6)^T$

(ii) $P = (2, 3, 5)^T$, $Q = (3, 5, 7)^T$

(iii) $P = \vec{e_1} + b\vec{e_2} - \vec{e_3}$, $Q = 12\vec{e_1} - 6\vec{e_3}$, wobei $b \in \mathbb{R}$ eine beliebige Zahl sei.

Aufgabe H5 (4 Punkte) *Skalar- und Vektorprodukt I*

(a) Es seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ zwei beliebige Vektoren. Beweisen Sie, dass für das Vektorprodukt immer gilt:

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = 0 = \langle \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle.$$

(b) Berechnen Sie jeweils $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ bzw. $\|\vec{x} \times \vec{y}\|$ für

  (i) $\|\vec{x}\| = 3$, $\|\vec{y}\| = 5$, $\measuredangle(\vec{x}, \vec{y}) = 30°$

  (ii) $\|\vec{x}\| = 3$, $\|\vec{y}\| = 5$, $\measuredangle(\vec{x}, \vec{y}) = 60°$

Aufgabe H6 (4 Punkte) *Skalar- und Vektorprodukt II*

(i) Berechnen Sie die Seitenlängen und Winkel des ebenen Dreiecks mit den Eckpunkten

$$A = \left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)^T, \quad B = \left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)^T, \quad C = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right)^T$$

und fertigen Sie eine Skizze an.

(ii) Identifizieren wir die Ebene mit der x-y-Ebene im $\mathbb{R}^3$, so erhalten wir Punkte

$$\tilde{A} = \left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right)^T, \quad \tilde{B} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, 0\right)^T, \quad \tilde{C} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 0\right)^T.$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks unter Verwendung des Vektorprodukts. Was wissen Sie nun über den Flächeninhalt des Dreiecks in (i)?

(iii) Berechnen Sie das Volumen des von den Vektoren

$$\overrightarrow{\tilde{A}\tilde{B}}, \quad \overrightarrow{\tilde{A}\tilde{C}}, \quad \vec{z} = (1, 1, 2)^T$$

aufgespannten Spats.