Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dipl. Math. Andreas Bärmann
Dipl. Math. Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 19. Oktober 2009

Mathematik I f. MB/MPE, WIMB, Mech und CE

1. Übung

Aufgabe 1 Gegeben seien folgende komplexe Zahlen

$$z_1 = 3 + 4i, \qquad z_2 = -2 + i, \qquad z_3 = 7 - i.$$

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von z_1, z_2, z_3.

b) Berechnen Sie $z_1 + z_3$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ und $|z_1|$ und geben Sie diese Zahlen in der Form $a + bi$ an.

c) Skizzieren Sie die Zahlen z_1, z_2, z_3 und die in b) berechneten Zahlen in der gaußschen Zahlenebene.

Aufgabe 2 Für eine komplexe Zahl $\mathbb{C} \ni z = a + i \cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ heißt $\overline{z} := a - i \cdot b \in \mathbb{C}$ die *zu z konjugierte Zahl*.

(a) Beweisen Sie, dass für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ die Regel $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ gilt.

(b) Beweisen Sie, dass für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ die Regel $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ gilt.

(c) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion folgende Aussage: Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt für jede Wahl $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ die Regel

$$\overline{\left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right)} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}.$$

(d) Zeigen Sie, daß für jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ die Identität $\overline{\overline{z}} = z$ gilt.

(e) Beschreiben Sie die Wirkung der komplexen Konjugation geometrisch in der gaußschen Zahlenebene.

Aufgabe 3 Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Aufgabe 4

(a) Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, so dass folgende Ungleichungen bzw. Gleichungen erfüllt sind:

$$(1) \quad \frac{x-4}{x^2-9} \leq 0, \ x \neq \pm 3, \qquad (2) \quad \frac{3x-1}{(x-4)^2} = \frac{1}{2}, \ x \neq 4.$$

(b) Bestimmen Sie

$$s = \sum_{k=1}^{100} k^{42} + \sum_{m=2}^{101} [75 - (m-1)^{42}].$$

Hausübungen

Aufgabe H1 (4 Punkte) Gegeben seien die folgenden komplexen Zahlen

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -1 + 2i.$$

(a) Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_2}{z_1}$ und $\frac{z_1}{z_2}$ und geben Sie diese Zahlen in der Form $a + bi$ an.

(b) Skizzieren Sie z_1 und z_2, sowie die berechneten komplexen Zahlen in der Zahlenebene.

Aufgabe H2 (4 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe H3 (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, so dass folgende Ungleichungen erfüllt sind:

$$(1) \quad |x - 5| + x \leq 7, \qquad (2) \quad |x - 5| \leq |x + 5|$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Wert (in Abhängigkeit von n) von

$$t(n) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2}{k+2} + \sum_{m=n+3}^{2n+2} \frac{m-2}{m}.$$