Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Karoline Götze
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 9.–11.12.2009

Einführung in die Funktionalanalysis

9. Übung

Aufgabe 1

(a) Entscheiden Sie, ob die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{falls} \quad 0 < x \leq 1, \\ 2 & \text{falls} \quad 1 < x < 2, \end{cases}$$

schwach differenzierbar in $L^2(0,2)$ ist.

(b) Für welche $\alpha > 0$ liegt die Funktion $f(x) = |x|^\alpha$ in $H^1(-1,1)$? Für welche $\alpha > 0$ ist $f \in C^1(-1,1)$?

Aufgabe 2

Beweisen Sie Korollar 7.5 aus der Vorlesung: Sei $I := (a,b)$ mit $-\infty < a < b < \infty$ und $u, v \in H^1(I)$. Dann ist $uv \in H^1(I)$ und $(uv)' = u'v + uv'$. Außerdem gilt

$$\int_y^x u'v \, \mathrm{d}t = uv\big|_y^x - \int_y^x uv' \mathrm{d}t \qquad \text{für alle} \quad x, y \in (a,b).$$

Bemerkung: Hier dürfen Sie verwenden, dass $C^\infty(I) \cap H^1(I)$ dicht in $H^1(I)$ liegt.

Aufgabe 3 Inhomogene Neumann-Randbedingung (K)

Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{auf } I = (0,1) \\ u'(0) = \alpha, \ u'(1) = \beta, \end{cases} \tag{1}$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f \in L^2(I)$. Zeigen Sie:

(a) Falls u eine klassische Lösung von (1) ist, so gilt

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv - \alpha v(0) + \beta v(1) \qquad \forall v \in H^1(I). \tag{2}$$

(b) Die Linearform $\varphi : H^1(I) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\varphi(v) := \int_I fv - \alpha v(0) + \beta v(1)$$

ist stetig. (*Hinweis:* Satz 7.4.)

(c) Es gibt genau eine Funktion $u \in H^1(I)$, die (2) löst.

(d) Für diese schwache Lösung gilt $u'(0) = \alpha$ und $u'(1) = \beta$.

Aufgabe 4 (K)

Es sei $I := (a, b)$ mit $-\infty < a < b < \infty$ und $f \in L^2(I)$. Betrachten Sie die folgenden beiden Aussagen:

(i) $f \in H^1(I)$.

(ii) Für alle $I' := (a', b') \subset I$ mit $[a', b'] \subset I$ existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

in $L^2(I')$.
(Hier muss oBdA $|h| < \min\{a - a', b - b'\}$ genommen werden, damit die Funktion $f(\cdot + h)$ auf I' überhaupt sinnvoll definiert ist.)

Zeigen Sie:

(a) Aus (i) folgt (ii).

(b) Aus (ii) folgt $f \in H^1_{loc}(I)$ (d.h. f ist in $H^1(K)$ für jedes kompakte $K \subset I$).

Bemerkung: Hier dürfen Sie wieder verwenden, dass $C^\infty(I) \cap H^1(I)$ dicht in $H^1(I)$ liegt.

Die mit **(K)** gekennzeichneten Übungen können in der nächsten Übungsstunde schriftlich zur Korrektur abgegeben werden.