Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Karoline Götze
Tobias Hansel

Einführung in die Funktionalanalysis

7. Übung

Aufgabe 1

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen von 1. oder 2. Kategorie in $\mathbb{R}$ sind:

$$\text{(i)} \quad \mathbb{R} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \mathbb{Q} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

(b) Sei X der lineare Raum aller Folgen mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Gliedern und $\|\cdot\|$ eine geeignete Norm auf X. Entscheiden Sie, ob X von 1. oder 2. Kategorie in X ist.

(c) Zeigen Sie, dass für $1 \leq p < q \leq \infty$, der lineare Raum ℓ^p von 1. Kategorie in ℓ^q ist.

Hinweis: Leiten Sie zunächst folgende Aussage her (orientieren Sie sich dabei an dem Beweis für den Satz von der offenen Abbildung):
Seien X, Y Banachraüme und $T : X \to Y$ ein linearer, beschränkter Operator, der nicht surjektiv ist. Dann ist das Bild von T von 1. Kategorie in Y.

Aufgabe 2 (K)

Sei X ein normierter Vektorraum und $M \subseteq X$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) M ist genau dann beschränkt, wenn für jedes $\varphi \in X'$ die Menge $\{|\varphi(x)| : x \in M\}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist.

(b) Jede schwach konvergente Folge ist beschränkt.

Aufgabe 3 (K)

Im Banachraum $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ betrachten wir den linearen Operator A mit

$$(Af)(x) := f'(x), \qquad f \in \mathcal{D}_j(A),\ j = 1, 2,\ x \in [0,1],$$

wobei der Definitionsbereich von A gegeben ist durch

$$\text{(i)} \quad \mathcal{D}_1(A) := C^1([0,1]) \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \mathcal{D}_2(A) := C^\infty([0,1]).$$

Untersuchen Sie die beiden Operatoren $(A, \mathcal{D}_1(A))$ und $(A, \mathcal{D}_2(A))$ auf Abgeschlossenheit.

Aufgabe 4

Um das Integral $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ für eine stetige Funktion f näherungsweise zu berechnen verwendet man häufig Näherungsformeln der Gestalt

$$Q_n(f) := \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^{(n)} f(t_i^{(n)}),$$

wobei $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leq 1$ eine Unterteilung des Intervalls $[0,1]$ ist und die Koeffizienten $\alpha_i^{(n)} \in \mathbb{R}$ gegeben sind. Nun stellt sich die Frage nach der Konvergenz $Q_n(f) \to \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ für $f \in C([0,1])$. Beweisen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

(i) $Q_n(f) \to \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ für alle $f \in C([0,1])$.

(ii) $Q_n(f) \to \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ für alle Polynome und $\sup_n \sum_{i=0}^n |\alpha_i^n| < \infty$.

Verwenden Sie ohne Beweis (aber mit Zitat), dass die Menge der Polynome in $C([0,1])$ dicht ist.

Die mit **(K)** gekennzeichneten Übungen können in der nächsten Übungsstunde schriftlich zur Korrektur abgegeben werden.