Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Karoline Götze
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 18.–20.11.2009

Einführung in die Funktionalanalysis

6. Übung

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie für die Operatoren R, L, M und T aus Aufgabe 2 auf Blatt 2 und für $1 < p < \infty$ die adjungierten Operatoren.

(b) Es sei $k \in L^2([0,1] \times [0,1])$. Bestimmen Sie den adjungierten Operator von $T \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$ gegeben durch

$$Tf(x) := \int_0^1 k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Aufgabe 2 (K)

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $x_k \in \ell^\infty$ mit

$$x_k(n) := \begin{cases} 1, & n \leq k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht schwach in ℓ^∞.

Aufgabe 3 (K)

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die L^p-Räume für $2 \leq p < \infty$ *gleichmäßig konvex* sind (s. (b)). Die folgenden Ungleichungen für nichtnegative reelle Zahlen dürfen einfach verwendet oder bewiesen werden:

$$\begin{aligned} a^p + b^p &\leq (a^2+b^2)^{p/2} \\ \Big(\frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2}\Big)^{p/2} &\leq \frac{1}{2}(c^p + d^p). \end{aligned}$$

(a) Sei I ein Intervall. Folgern Sie die *Clarkson'sche Ungleichung*

$$\Big\|\frac{f+g}{2}\Big\|_p^p + \Big\|\frac{f-g}{2}\Big\|_p^p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)$$

für alle $f, g \in L^p(I)$.

(b) Zeigen Sie, dass $L^p(I)$ gleichmäßig konvex ist, also dass es für alle $0 < \varepsilon < 2$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $f, g \in L^p(I)$ mit $\|f\| = \|g\| = 1$:

$$\Big\|\frac{f+g}{2}\Big\|_p > 1 - \delta \Rightarrow \|f-g\|_p < \varepsilon.$$

Zusatz: Was bedeutet das für die Gestalt der Einheitskugel?

Aufgabe 4

Sei X ein normierter Raum und $M \subset X$ nichtleer, konvex und abgeschlossen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) M is schwach abgeschlossen, d.h. ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ eine Folge in M die schwach gegen x konvergiert, dann ist $x \in M$.

(b) (Bestapproximation) Ist X zusätzlich reflexiv, dann existiert zu jedem $x_0 \in X \setminus M$ ein $x \in M$ mit minimalem Abstand zu x_0, also mit

$$\|x - x_0\|_X = \operatorname{dist}(x_0, M).$$

Die mit **(K)** gekennzeichneten Übungen können in der nächsten Übungsstunde schriftlich zur Korrektur abgegeben werden.