Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Karoline Götze
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 11.–13.11.2009

Einführung in die Funktionalanalysis

5. Übung

Aufgabe 1

(a) Sei X ein normierter Vektorraum, $(x_n) \subset X$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass x_n genau dann schwach gegen x konvergiert, wenn eine dichte Teilmenge $D \subset X'$ existiert mit $\lim_{n\to\infty} x'(x_n) = x'(x)$ für alle $x' \in D$.

(b) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall und $1 < p < \infty$.
Ist $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ mit *Periode* $\kappa > 0$, d.h. $g(x+\kappa) = g(x)$ für fast alle x, und

$$\frac{1}{\kappa}\int_0^\kappa g(x)\mathrm{d}x = \lambda,$$

so konvergieren die Funktionen $f_n(x) := g(nx)$ für $n \to \infty$ schwach in $L^p(I)$ gegen λ.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass c_0 nicht reflexiv ist.

Aufgabe 3 (K)

(a) Sei X ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass aus X' separabel X separabel folgt und dass, falls X ein reflexiver Raum ist, auch die Umkehrung gilt.

(b) Zeigen Sie, dass abgeschlossene Unterräume reflexiver Räume reflexiv sind.

(c) Zeigen Sie, dass ℓ^∞ nicht reflexiv ist (verwenden Sie dabei Aufgabe 2).

Aufgabe 4 (K)

Es sei X ein normierter Raum. Für $x \in X$ sei $\delta_x : X' \to \mathbb{K}$ definiert durch $\delta_x(x') := x'(x)$. Zeigen Sie, dass $\delta_x \in (X')'$ für jedes $x \in X$ gilt und dass die Abbildung $\iota : X \to X'', x \mapsto \delta_x$ linear, isometrisch, aber i.A. nicht surjektiv ist.

Die mit **(K)** gekennzeichneten Übungen können in der nächsten Übungsstunde schriftlich zur Korrektur abgegeben werden.