Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Karoline Götze
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 4.–6.11.2009

Einführung in die Funktionalanalysis

4. Übung

Aufgabe 1

Es sei Y ein abgeschlossener Unterraum eines normierten Raumes X, und es sei $x_0 \in X \setminus Y$. Dann existiert ein $\phi \in X'$ mit der Eigenschaft

$$\phi|_Y = 0, \quad \|\phi\| = 1 \text{ und } \phi(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, Y).$$

Aufgabe 2 (K)

Eine lineare Abbildung $\ell : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ heißt *Banachlimes*, wenn

- $\ell(Lx) = \ell(x)$ für alle $x \in \ell^\infty$, wo L der Linksshiftoperator auf ℓ^∞ ist (vgl. Aufgabe 2.2).
- aus $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\ell(x) \geq 0$.
- $\ell(\mathbf{1}) = 1$, wobei $\mathbf{1} = (1, 1, 1, \dots)$.

(a) Sei nun ℓ ein Banachlimes. Zeigen Sie:

  - $\ell \in (\ell^\infty)'$ und $\|\ell\| = 1$,
  - $\liminf x \leq \ell(x) \leq \limsup x$ für $x \in \ell^\infty$, speziell $\ell(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ für $x \in c$,
  - ℓ ist nicht multiplikativ, d.h., es gilt nicht $\ell(x \cdot y) = \ell(x)\ell(y)$ für alle $x, y \in \ell^\infty$.

(b) Zeigen Sie: Es existiert ein Banachlimes ℓ.
(Hinweis: (eine Möglichkeit) Sei $p(x) = \sup_n x_n$. Zeigen Sie, dass $0 \leq p|_U$, wo $U := \{x - Lx : x \in \ell^\infty\}$ und setzen Sie mit Hahn-Banach fort.)

Aufgabe 3 (K)

Es seien $X \neq 0$ ein normierter Raum und $S, T : X \to X$ lineare Abbildungen mit der Eigenschaft $ST - TS = \mathrm{Id}$. Zeigen Sie, dass dann notwendigerweise S oder T unstetig ist. (Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $ST^{n+1} - T^{n+1}S = (n+1)T^n$ ist.)
Seien speziell S und T definiert durch $Sf(x) := f'(x)$, sowie $Tf(x) := xf(x)$ für beliebig oft differenzierbare Funktionen f. Zeigen Sie, dass dann $ST - TS = \mathrm{Id}$ gilt.
Kommentar: Die Gleichung $ST - TS = \mathrm{Id}$ ist eine Umformulierung der Heisenberg'schen Unschärferelation. Die obige Aussage impliziert also, dass die typischen Operatoren der Quantenmechanik unbeschränkt sind und man yur Beschreibung quantenmechanischer Effekte nicht mit endlich-dimensionalen Vektorräumen auskommt.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass es auf jedem unendlichdimensionalen normierten Raum X ein unstetiges Funktional gibt.
Hinweis: Verwenden Sie eine Basis von X im Sinne der linearen Algebra.

Kommentar: Dirk Werner schreibt dazu (s. Werner: *Funktionalanalysis*, S. 132): Ïronischerweise verwendet man mit dem Zorn'schen Lemma dasselbe Beweismittel, um im Satz von Hahn-Banach allgemein die Existenz stetiger Funktionale auf normierten Räumen zu zeigen, das man - via Existenz einer Vektorraumbasis - heranziehen muss, um die Existenz unstetiger Funktionale zu begründen."

Die mit **(K)** gekennzeichneten Übungen können in der nächsten Übungsstunde schriftlich zur Korrektur abgegeben werden.