



Einführung in die Funktionalanalysis

3. Übung

Aufgabe 1

Sei X ein normierter Raum, $D \subseteq X$ ein dichter Teilraum und Y ein Banachraum. Ferner sei $T : D \rightarrow Y$ ein beschränkter linearer Operator. Zeigen Sie: Dann existiert genau ein Operator $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $\tilde{T}x = Tx$ für alle $x \in D$ und $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Aufgabe 2 (K)

Sei $\alpha \in (0, 1)$. Die Funktion $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$k(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{|x-y|^\alpha}, & x \neq y, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $f \in C([0, 1])$ sei T definiert durch

$$(Tf)(x) := \int_0^1 k(x, y)f(y) dy.$$

- (a) Zeigen Sie, dass T ein stetiger Operator auf $C([0, 1])$ ist.
- (b) Ist T kompakt?
- (c) Sei $k \in C([0, 1] \times [0, 1])$. Der Operator $S : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$, definiert durch

$$(Sf)(x) := \int_0^x k(x, y)f(y) dy$$

heißt *Volterra Operator*. Zeigen Sie, dass S kompakt ist.

Aufgabe 3 (K)

Es sei $X := (C([0, 2]), \|\cdot\|_\infty)$ und $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$\phi(f) := \int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx, \quad f \in C([0, 2]).$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\phi \in X'$ und bestimmen Sie $\|\phi\|$.
- (b) Weisen Sie nach, dass kein $f \in C([0, 2])$ existiert mit $\|f\|_\infty \leq 1$ und $|\phi(f)| = \|\phi\|$.
- (c) Geben Sie Beispiele von unstetigen Linearformen auf normierten Räumen an.

Aufgabe 4

- (a) Sei $m \in l^\infty$ und $M : l^p \rightarrow l^p$, ($1 \leq p < \infty$) sei definiert durch

$$Mx = mx \quad \text{vgl. Aufgabe 2.2.}$$

Dann ist M kompakt genau dann, wenn $m \in c_0$ ist.

- (b) Widerlegen Sie anhand eines Gegenbeispiels die folgende Behauptung: Ist $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Operatoren auf einem Banachraum X und existiert $Tx := \lim T_n x$ für alle $x \in X$, dann ist T kompakt. Tipp: Man betrachte die Operatoren $T_n : l^2 \rightarrow l^2$, gegeben durch

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots).$$

Die mit **(K)** gekennzeichneten Übungen können in der nächsten Übungsstunde schriftlich zur Korrektur abgegeben werden.