Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Karoline Götze
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 21.–23.10.2009

Einführung in die Funktionalanalysis

2. Übung

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass ℓ^p mit $1 \leq p < \infty$ separabel ist.

(b) Geben Sie eine beschränkte Folge in ℓ^∞ an, die keine konvergente Teilfolge besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass ℓ^∞ nicht separabel ist.

Aufgabe 2 (K)

Es sei $X := \ell^p$, $1 \leq p < \infty$, und $(a_n)_n$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Die Operatoren $R, L, M, T : X \to X$ seien definiert durch

$$\begin{aligned} R : (x_1, x_2, \dots) &\quad\mapsto\quad (0, x_1, x_2, \dots), \\ L : (x_1, x_2, \dots) &\quad\mapsto\quad (x_2, x_3, \dots), \\ M : (x_1, x_2, \dots) &\quad\mapsto\quad (a_1 x_1, a_2 x_2, \dots), \\ T &:= ML. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass R, L, M, T beschränkte Operatoren auf ℓ^p sind und bestimmen Sie die jeweiligen Operatornormen.

(b) Es gelte außerdem $|a_1| \geq |a_2| \geq \cdots$. Für $n \in \mathbb{N}$ bestimme man die Operatornormen von R^n, L^n, M^n, T^n.

Aufgabe 3

Es seien $(X_1, \|\cdot\|_1)$ und $(X_2, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume. X_1 heißt *isomorph* zu X_2, falls eine lineare, bijektive Abbildung $\varphi : X_1 \to X_2$ existiert, so dass φ und φ^{-1} stetig sind. Gilt außerdem $\|\varphi(x)\|_2 = \|x\|_1$ für alle $x \in X_1$, so heißt φ *isometrischer Isomorphismus.*
Es sei $a \leq \alpha < \beta \leq b$ und $U := \{f \in C([a,b]) : f(s) = 0 \text{ für alle } s \in [\alpha, \beta]\}$. Zeigen Sie, dass U ein abgeschlossener Unterraum von $C([a,b])$ ist und dass der Quotientenraum $C(a,b)/U$ isometrisch isomorph zu $C([\alpha,\beta])$ ist.

Aufgabe 4 (K)

Sei $\mathrm{Lip}([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ Lipschitz-stetig}\}$. Für $f \in \mathrm{Lip}([0,1])$ sei

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := |f(0)| + \sup_{x \neq y} \left| \tfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathrm{Lip}([0,1]), \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}})$ ein Banachraum ist.

Die mit **(K)** gekennzeichneten Übungen können in der nächsten Übungsstunde schriftlich zur Korrektur abgegeben werden.