Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Karoline Götze
Tobias Hansel
Christof Trunk

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 3.–5.2.2010

Einführung in die Funktionalanalysis

14. Übung

Aufgabe 1 Wurzel eines positiven, selbstadjungierten, kompakten Operators

Es sei H ein Hilbertraum. Man nennt $T \in \mathcal{L}(H)$ einen *positiven* Operator, falls $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in H$ gilt. Beweisen Sie für einen kompakten, selbstadjungierten Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ die folgenden Aussagen:

(a) T ist genau dann positiv, wenn alle Eigenwerte von T größer oder gleich 0 sind.

(b) Ist T positiv, so existiert ein positiver, selbstadjungierter und kompakter Operator S mit $S^2 = T$ (man schreibt auch $S = T^{1/2}$).

Aufgabe 2 Cayley-Transformation (K)

Es sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert. Beweisen Sie:

(a) $i \in \rho(T)$ und $-i \in \rho(T)$.

(b) $U_T := (T + i\mathrm{Id})(T - i\mathrm{Id})^{-1}$ ist unitär (U_T heißt *Cayley-Transformierte* von T).

(c) $1 \in \rho(U_T)$ und es gilt $T = -i(\mathrm{Id} + U_T)(\mathrm{Id} - U_T)^{-1}$.

Aufgabe 3 (K)

Es sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{L}(H)$. Zeigen Sie:

(a) T ist Isometrie $\Longleftrightarrow \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall\, x, y \in H$.

(b) T ist selbstadjungiert $\Longleftrightarrow \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in H$.

(c) T ist selbstadjungiert $\Longrightarrow \|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Tx, x\rangle|$.

Aufgabe 4 Spektrum von T^2

Es sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\sigma(T^2) = (\sigma(T))^2 := \{\lambda^2 : \lambda \in \sigma(T)\}$.

(b) $A\sigma(T^2) = (A\sigma(T))^2$.

(c) $P\sigma(T^2) = (P\sigma(T))^2$.

Die mit **(K)** gekennzeichneten Übungen können in der nächsten Übungsstunde schriftlich zur Korrektur abgegeben werden.