Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Karoline Götze
Tobias Hansel
Christof Trunk

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 27.–29.1.2010

Einführung in die Funktionalanalysis

13. Übung

Aufgabe 1

Sei $T \in \mathcal{L}(X)$, X ein Banachraum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $\lambda \notin P\sigma(T)$ so ist der Operator $(\lambda - T)^{-1} : \mathrm{Im}(\lambda - T) \to X$ abgeschlossen.

(b) Sei $\lambda \notin P\sigma(T)$. Es gilt $\lambda \in A\sigma(T)$ genau dann, wenn $(\lambda - T)^{-1} : \mathrm{Im}(\lambda - T) \to X$ unstetig ist *(Hinweis: Benutzen Sie den Satz vom abgeschlossenem Graphen).*

(c) Es gilt $\lambda \in A\sigma(T)$ genau dann, wenn eine Folge $(x_n) \subseteq X$ existiert mit $\|x_n\| = 1$ und $(\lambda - T)x_n \to 0$.

Aufgabe 2

Sei $1 < p < \infty$ und der Operator $T : \ell^p \to \ell^p$ durch $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (1 \cdot x_2, \frac{1}{2} \cdot x_3, \frac{1}{3} \cdot x_4, \ldots)$ gegeben. Beweisen Sie, die folgenden Aussagen:

(a) T ist kompakt.

(b) $\sigma(T) = \{0\}$, aber $T^n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\sigma(A) = \{0\}$ ist nilpotent, d.h. es exisiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $A^m = 0$.

Aufgabe 3 (K)

Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und nicht leer. Zeigen Sie, dass es einen stetigen Operator T auf ℓ^2 gibt, für den $\sigma(T) = K$ gilt. *Hinweis:* Multiplikatoren!

Aufgabe 4 Fredholmsche Alternative, Volterra-Integralgleichung (K)

Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $k \in C([0,1])$. Zu vorgegebenem $g \in C([0,1])$ betrachten wir die Integralgleichung

$$\lambda f(x) - \int_0^x k(y) f(y) \mathrm{d}y = g(x) \qquad \text{für } x \in [0,1]. \tag{1}$$

Zeigen Sie zunächst, dass das homogene Problem (d.h. $g = 0$) keine stetige Lösung $f \neq 0$ besitzt und folgern Sie daraus mit Hilfe von Aufgabe 3.2 und der Fredholmschen Alternative, dass (1) für jedes $g \in C([0,1])$ genau eine Lösung $f \in C([0,1])$ besitzt.

Die mit **(K)** gekennzeichneten Übungen können in der nächsten Übungsstunde schriftlich zur Korrektur abgegeben werden.