Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Karoline Götze
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
WS 09/10 13.–15.01.2010

Einführung in die Funktionalanalysis

11. Übung

Aufgabe 1 (K)(Eigenschaften der Fourier-Transformation)

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Fourier-Transformation für Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $k \in \mathbb{N}_0$:

(a) $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\hat{g}$.

(b) Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\mathcal{F}[\partial^\alpha f](\xi) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}f(\xi)$.

Aufgabe 2 (K)

Zeigen Sie, dass der Rellich'sche Einbettungssatz, die kompakte Einbettung von $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$, nicht für $\Omega = \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 3

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \mathcal{F}^{-1}(g^m \mathcal{F}f) \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

wobei $g^m(\xi) := (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}}$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 4 (Schwartzraum)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt *schnell fallend*, falls $\lim_{|x|\to\infty} x^\alpha f(x) = 0$ für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt. Der Raum

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : D^\beta f \text{ schnell fallend } \forall \beta \in \mathbb{N}_0^n\}$$

heißt *Schwartzraum*. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für jede Wahl von Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ ist die Abbildung

$$N_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)|$$

eine Halbnorm auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Ist X ein Vektorraum und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine separierende Folge von Halbnormen auf X - d.h. für jedes $x \in X \setminus \{0\}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $p_n(x) \neq 0$ - so definiert

$$d(x, y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \frac{p_n(x - y)}{1 + p_n(x - y)}$$

eine Metrik auf X.
Insbesondere kann so eine Metrik auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiert werden.

Die mit **(K)** gekennzeichneten Übungen können in der nächsten Übungsstunde schriftlich zur Korrektur abgegeben werden.