Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Karoline Götze
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 16.–18.12.2009

Einführung in die Funktionalanalysis

10. Übung

Aufgabe 1

Es ei $n \geq 2$ und $\Omega := B(0, 1/e) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1/e\}$. Zeigen Sie, dass es eine Funktion aus $H^1(\Omega)$ gibt, die auf Ω nicht stetig ist. Betrachten Sie dazu Funktionen der Form

$$f(x) := (\log(1/|x|))^s, \qquad s \in (0, \infty).$$

Was bedeutet dies für Aussagen über H^1-Funktionen am Rand ihres Definitionsbereiches?

Aufgabe 2 (K)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, offen und beschränkt. Wir betrachten einen elliptischen Differentialoperator 2. Ordnung der Form

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - a_0 u,$$

wobei $a_{ji} = a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $1 \leq i, j \leq n$ und $a_0 \in C(\Omega)$, $a_0(x) \geq 0$ für jedes $x \in \Omega$. Wir setzen im Folgenden die sogenannt *Elliptizitätsbedingung* voraus:
Es existiert ein $\alpha > 0$, so dass

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > \alpha|\xi|^2, \qquad \forall x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Wir betrachten nun das Problem

$$\begin{cases} -Lu &= f, & \text{in } \Omega, \\ \quad u &= 0, & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

wobei $f \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie:

(a) Falls u eine klassische Lösung von (1) ist, d.h. $u \in C^2(\overline{\Omega})$ erfüllt (1), so gilt

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \int_\Omega a_0 uv = \int_\Omega fv, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2}$$

(b) Es existiert eine eindeutige Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des schwache Problems (2), mit

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

für eine von f unabhängigen Konstante $C > 0$.

Aufgabe 3 Der Sobolevraum $W^{1,p}(I)$

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Genau so wie wir zu $L^2(I)$ den Raum $H^1(I)$ definiert haben, können wir für alle $p \in (1, \infty)$ den Raum

$$W^{1,p}(I) := \left\{ f \in L^p(I) : \exists g \in L^p(I) \text{ so dass } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \forall \varphi \in C_c^\infty(I) \right\}$$

definieren. Wir nennen auch hier g die schwache Ableitung von f und schreiben $f' = g$. Diese Räume sind reflexive und seperable Banachräume bzgl. der Norm

$$\|f\|_{1,p} := (\|f\|_p^p + \|f'\|_p^p)^{1/p}$$

und werden *Sobolevräume* genannt. Ebenfalls analog definieren wir

$$W_0^{1,p}(I) := \overline{C_c^\infty(I)}^{W^{1,p}(I)}.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $(f_n) \subset W^{1,p}(I)$ eine Folge und existieren $f, g \in L^p(I)$ mit $f_n \to f$ und $f_n' \to g$ in $L^p(I)$, dann ist $f \in W^{1,p}(I)$ mit $f' = g$.

(b) Ist $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $h(0) = 0$ und sind $\sup_{t \in \mathbb{R}} |h'(t)|$ und $\sup_{t \neq 0} |h(t)/t|$ endlich, so ist für jede Funktion $f \in W_0^{1,p}(I)$ auch $h \circ f \in W^{1,p}(I)$ und es gilt für die schwachen Ableitungen $(h \circ f)' = (h' \circ f) \cdot f'$.

Hinweis: Jede L^p-konvergente Folge enthält eine fast überall konvergente Teilfolge.

Die mit **(K)** gekennzeichneten Übungen können in der nächsten Übungsstunde schriftlich zur Korrektur abgegeben werden.

Wir wünschen frohe Weihnachten und einen guten Start ins Jahr 2010!