Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Karoline Götze
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 14.–16.10.2009

Einführung in die Funktionalanalysis

1. Übung

Aufgabe 1 (K)

Für $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ sei

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{d} |x_i|, \quad \|x\|_2 := \Big(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2\Big)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty := \max_{1\le i\le d} |x_i|.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$, $p = 1, 2, \infty$, Banachräume sind.

(b) Skizzieren Sie für $d = 2$ die “Einheitskugeln” $B_p := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_p \le 1\}$.

Aufgabe 2

Es sei $X := C([a, b])$ für $a < b$ und $\omega : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, nichtnegative Funktion. Wir setzen

$$p_\omega(f) := \sup\{\omega(s)|f(s)| : s \in [a, b]\}.$$

(a) Welche Bedingungen muss man an ω (genauer an $\omega^{-1}(0)$) stellen, damit p_ω eine Norm ist?

(b) Es existiere $\varepsilon > 0$ so, dass $\omega(s) \ge \varepsilon$ für alle $s \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass (X, p_ω) ein Banachraum ist.

Aufgabe 3 (K)

Für $a < b$ sei $X := C^1([a, b]) := \{f \in C([a, b]) : f \text{ stetig differenzierbar in } [a, b]\}$. Für $f \in X$ sei

$$\begin{aligned} p_1(f) &:= \sup\{|f(s)| : s \in [a, b]\}, \\ p_2(f) &:= \sup\{|f'(s)| : s \in [a, b]\}, \\ p_3(f) &:= |f(a)| + \sup\{|f'(s)| : s \in [a, b]\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) p_1 ist eine Norm auf X; p_2 ist keine Norm auf X.

(b) (X, p_1) ist kein Banachraum.

(c) (X, p_3) ist ein Banachraum.

Aufgabe 4

Sei E eine nichtleere Menge. Eine Funktion $d : E \times E \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik*, falls

(i) $d(x, y) \ge 0$ und $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$,

(iii) $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$,

wobei $x, y, z \in E$.

Sei $I := [0, \infty)$ und $F := I \times E$. Zeigen Sie, dass die Funktion $d^2 : F \times F \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$d^2((t,x),(s,y)) := (d(x,y)^2 + |t-s|)^{1/2} \qquad (x, y \in E, s, t \in I),$$

eine Metrik auf F definiert, falls d eine Metrik auf E ist. In diesem Fall wird d^2 auch *parabolische Metrik* genannt.

Die mit **(K)** gekennzeichneten Übungen können in der nächsten Übungsstunde schriftlich zur Korrektur abgegeben werden.