Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Karoline Götze
Tobias Hansel
Christof Trunk

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 20.–22.01.2010

Einführung in die Funktionalanalysis

12. Übung

Aufgabe 1 (Injektiv und Surjektiv)

Ist X ein Banachraum endlicher Dimension, so ist jeder injektive Operator auf X automatisch auch surjektiv und umgekehrt. Zeigen Sie, dass das in beliebiger Dimension nicht mehr der Fall sein muss.

Aufgabe 2 (K)(Spektren von Links-, Rechtsshift und Multipliktionsoperator auf ℓ^2)

Bestimmen Sie für $p = 2$ und die Operatoren R, L und M aus Übungsblatt 2, Aufgabe 2 die Spektralradien, sowie jeweils das Punktspektrum, das approximative Spektrum und das Residualspektrum. Hierfür können Sie die Resultate aus Aufgabe 3 benutzen.

Aufgabe 3

Es sei X ein Banachraum und $T \in \mathscr{L}(X)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $R\sigma(T) = P\sigma(T')$.

(b) Wenn T eine Isometrie ist, so gilt $A\sigma(T) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Aufgabe 4 (K)(Multiplikationsoperator auf $C(0,1)$)

Es sei $X = C([0,1])$ und wir definieren für $g \in C([0,1])$ den Operator

$$M_g = \begin{cases} X \to X \\ f \mapsto gf. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $M_g \in \mathscr{L}(X)$ gilt und die Abbildung $\Phi : X \to \mathscr{L}(X), g \mapsto M_g$ eine Isometrie ist.

(b) Bestimmen Sie zu vorgegebenem g das Spektrum von M_g.

(c) Unter welchen Annahmen an g ist $P\sigma(M_g) \neq \emptyset$?

Die mit **(K)** gekennzeichneten Übungen können in der nächsten Übungsstunde schriftlich zur Korrektur abgegeben werden.