



13. Übungsblatt zur „Mathematik III für BI, BSc. WI/BI, MaWi, AngGeo, UI“

Gruppenübung

Auf diesem und dem nächsten Übungsblatt gibt es nur noch Gruppenübungen. Der Umfang dieses Übungsblattes ist wahrscheinlich zu groß, um es in der Übung vollständig zu bearbeiten. Die nicht bewältigten Gruppenübungen sind als freiwillige Hausübungen anzusehen, deren Ergebnisse in den Sprechstunden erfragt und in den Lösungshinweisen nachvollzogen werden können.

Aufgabe G34 (Tabellen für Werte von Verteilungsfunktionen und Quantilen)

- Sei X eine $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X . Ermitteln Sie mit der entsprechenden Tabelle den Wert von $F_X(2, 01)$.
- Wie lautet die Definition des p -Quantils u_p einer Zufallsvariable Y ?
- Wie lauten die Definitionen der χ_r^2 -, t_r - und der $F_{r,s}$ -Verteilung? Skizzieren Sie deren Dichtefunktionen.
- Ermitteln Sie durch Nachschlagen in den entsprechenden Tabellen das 0,9-Quantil für eine $N(0, 1)$ -verteilte, eine χ_{10}^2 -verteilte, eine t_6 -verteilte und eine $F_{2,10}$ -verteilte Zufallsvariable.
- Sei $t_{n,p}$ das p -Quantil einer t_n -Verteilung. Wie lautet $t_{n,1-p}$? Geben Sie den Intervall $[a, b]$ mit

$$P(a \leq X \leq b) = 0,8$$

an, wenn X t_6 -verteilt ist.

Aufgabe G35 (Maximum-Likelihood-Schätzer)

Aus Erfahrung sei bekannt, dass die störungsfreie Betriebsdauer eines bestimmten Systems durch eine stetig verteilte Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{-\theta \cdot x^2} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben werden kann. Bestimmen Sie aus den folgenden 20 Betriebsdauern (in 1000 Stunden) den Maximum-Likelihood Schätzwert für θ .

1.530	1.173	1.832	1.075	1.539
0.998	2.083	0.693	2.529	1.693
1.325	1.487	1.298	1.743	1.432
1.369	0.987	2.222	1.818	1.505

Aufgabe G36 (Maximum-Likelihood-Schätzer)

Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n seien unabhängig und identisch verteilt mit der Verteilungsfunktion

$$F_\theta(x) = \begin{cases} 1 - \theta^2/x^2, & \text{falls } x \geq \theta, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

wobei der Parameter $\theta > 0$ unbekannt ist.

Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T_n für $\tau(\theta) = \theta$.

Aufgabe G37 (B)

ei der Größenmessung in einer Gruppe von 9 Personen ergaben sich folgende Körpergrößen [in cm]:

184.2, 182.6, 185.3, 184.5, 186.2, 183.9, 185.0, 187.1, 184.4.

Diese Messwerte werden als Realisationen der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_9 angenommen, die unabhängig und identisch $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt seien.

- Geben Sie ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.99 für den Erwartungswert μ an, falls die Standardabweichung bekannt ist und $\sigma = 2.4$ [cm] beträgt.
- Welches Konfidenzintervall ergibt sich in (a) für dasselbe Konfidenzniveau, falls die Standardabweichung als unbekannt angenommen wird?
- Ermitteln Sie im letzteren Fall ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.99 für die Varianz σ^2 .

Aufgabe G38 (F)

ür die Gewichte von Warenpackungen wird angenommen, dass sie durch unabhängige $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariablen beschrieben werden können. Eine Stichprobe vom Umfang 10 aus dem Warenlager ergab für die Gewichte (in *kp*):

20.40 19.80 20.05 20.50 20.20
20.25 20.00 19.90 20.15 20.10

Bestimmen Sie ein konkretes Konfidenzintervall der Form $[a, \infty)$ für μ zum Niveau 0.99.