

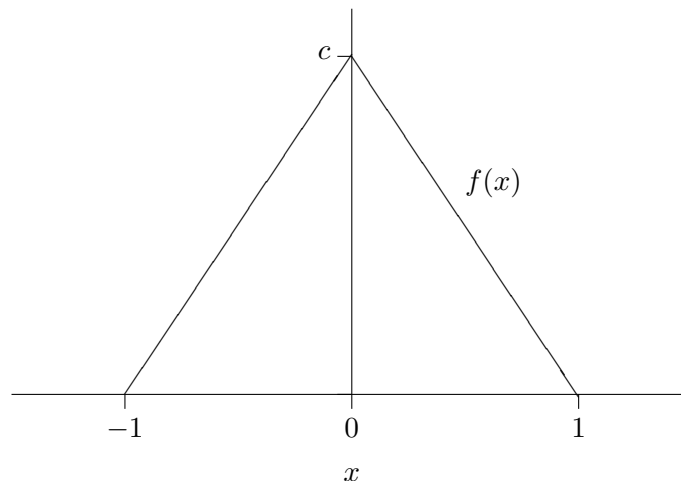


11. Übungsblatt zur „Mathematik III für BI, BSc. WI/BI, MaWi, AngGeo, UI“

Gruppenübung

Aufgabe G28 (Dichte- und Verteilungsfunktion)

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit der Dichte f folgender Form:



- Berechnen Sie die Konstante c .
- Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F von X .
- Berechnen Sie $P(X \leq -0.5)$, $P(0 \leq X \leq 0.5)$ und $P(X^2 \geq 0.25)$.
- Geben Sie den Erwartungswert und die Varianz von X an.

Aufgabe G29 (Exponentialverteilung)

In einen Kronleuchter werden gleichzeitig 10 Glühbirnen eines bestimmten Typs eingeschraubt. Die Lebensdauer einer Glühbirne dieses Typs (in Stunden) lasse sich durch eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ angemessen beschreiben. Für die Lebensdauern der einzelnen Glühbirnen wird eine Unabhängigkeitsannahme getroffen.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühbirne dieses Typs eine Lebensdauer von über 500 Stunden hat.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 8 der 10 Glühbirnen eine Lebensdauer von über 500 Stunden haben.

- (c) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Glühbirnen, die eine Lebensdauer von über 500 Stunden haben.

Aufgabe G30 (Gleichverteilung)

Bei der Beladung eines LKW mit Kisten muss darauf geachtet werden, dass das Gewicht der Ladung höchstens 7.8 Tonnen beträgt. Die Gewichte [in kg] der einzelnen Kisten sollen durch identisch verteilte Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n beschrieben werden, für die folgende Dichte angenommen wird:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & \text{für } 105 \leq x \leq 135 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie das Durchschnittsgewicht und die Varianz des Gewichts einer einzelnen Kiste.
(b) Bestimmen Sie mittels der Ungleichung von Tschebyscheff eine Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass das Gesamtgewicht von $n = 64$ dieser Kisten zwischen 7.56 Tonnen und 7.8 Tonnen liegt.

Hausübung

Aufgabe H28 (Dichte- und Verteilungsfunktion)

Es sei X eine Zufallsgröße mit der Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = a + b \cdot \arctan(x) \quad -\infty < x < \infty.$$

- (a) Bestimmen Sie die Konstanten a und b .
(b) Wie lautet die Dichtefunktion von X ?
(c) Bestimmen Sie die Verteilungs- und Dichtefunktion von $Y = |X|$.

Aufgabe H29 (Normalverteilung)

Eine Metallhobelmaschine stellt Platten her, deren Dichte X untersucht wird. Es kann angenommen werden, dass X normalverteilt ist mit den Parametern $\mu = 10 \text{ mm}$ und $\sigma = 0.02 \text{ mm}$. Wieviel Prozent Ausschuß würden Sie erhalten, wenn die Platten

- (a) mindestens 9.97 mm stark sein sollen
(b) maximal 10.05 mm stark sei dürfen
(c) um maximal $\pm 0.03 \text{ mm}$ vom Sollwert 10 mm abweichen dürfen?
(d) Wie müssen Sie die Toleranzgrenzen $10 - c$ und $10 + c$ wählen, damit Sie nicht mehr als 5% Ausschuß erhalten?

Aufgabe H30 (Transformierte Exponentialverteilung)

Es sei X eine mit dem Parameter $\lambda = 3$ exponentialverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(Y)$, die Varianz $Var(Y)$ und die Verteilungsfunktion $F_Y(y)$:

- (a) $Y = e^{-X}$
(b) $Y = 2X$

Aufgabe H31 (Bernoullische DGL)

Lösen Sie für $x > 0$ die DGL

$$y' = -\frac{1}{x}y + \frac{\ln(x)}{x}y^2.$$