Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
M. Slassi
H. Schäfer

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
14.12.2009

10. Übungsblatt zur „Mathematik III für BI, BSc. WI/BI, MaWi, AngGeo, UI“

Gruppenübung

Aufgabe G25 (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Familie genau k Kinder hat, sei $p_k = \frac{1}{4} \cdot (\frac{3}{4})^k$, $k \geq 0$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich bei einem zufällig herausgegriffenen Kind um einen Jungen handelt, sei $\frac{12}{23}$. Für die Geschlechtszugehörigkeit verschiedener Kinder innerhalb einer Familie wird die Unabhängigkeitsannahme gemacht.

a) Wie wahrscheinlich ist es, dass unter den Kindern einer zufällig ausgewählten Familie genau ein Junge ist?

b) Wie groß ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Junge genau eine Schwester hat, falls es sich um eine Familie mit genau einem Jungen handelt?

Hinweis : $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k \cdot p^{k-1} = \frac{1}{(1-p)^2}$ für $0 < p < 1$.

Aufgabe G26 (Unabhängigkeit)

Ein weißer und ein schwarzer Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

A: Der weiße Würfel zeigt eine Drei.

B: Beide Würfel zeigen die gleiche Augenzahl.

C: Die Augensumme der beiden Würfel ist durch vier teilbar.

(a) Prüfen Sie die Ereignisse auf paarweise und vollständige Unabhängigkeit.

(b) Finden Sie ein weiteres Ereignis D, so dass A und D unabhängig sind. Begründen Sie Ihre Wahl.

Aufgabe G27 (Bernoulli)

Zu Überprüfung einer Warenanlieferung aus einer großen Menge wurden folgende Vorschriften verwendet:
Die Sendung wird abgelehnt, falls in einer Stichprobe vom Umfang

(a) 15 mehr als ein fehlerhaftes Stück auftritt

(b) 30 mehr als zwei fehlerhafte Stücke auftreten.

Welche Methode bietet größere Sicherheit, eine Sendung abzulehnen, falls diese 10% Auschuß enthält?

Hausübung

Aufgabe H25 (Poisson-Verteilung)

An einem lauschigen Augustabend werden durchschnittlich 6 Sternschnuppen pro Stunde beobachtet. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Anzahl X_t der in t Minuten beobachteten Sternschnuppen poissonverteilt ist, mit dem Parameter $\lambda = \frac{t}{\alpha}$, $\alpha > 0$.

(a) Bestimmen Sie α.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass während einer Viertelstunde mindestens mindestens zwei Sternschnuppen beobachtet werden?

Aufgabe H26 (Erwartungswert und Varianz)

Es werden unabhängig voneinander eine Reihe von Schüssen mit einer Trefferwahrscheinlichkeit von je $p = 0.8$ abgefeuert. Das Schießen soll nach dem ersten Treffer abgebrochen werden, insgesamt dürfen aber nicht mehr als 4 Schüsse abgegeben werden.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Ziel getroffen?

(b) Als Zufallsgröße X wird die Anzahl der abgefeuerten Schüsse definiert. Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X.

(c) Bestimmen Sie $E(X)$ und $Var(X)$.

Aufgabe H27 (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

Die Zuverlässigkeit einer Tuberkulose (Tbc)-Röntgenuntersuchung sei durch folgende Angaben gekennzeichnet:

- 90 % der Tbc-kranken Personen werden durch Röntgen entdeckt
- 99 % der Tbc-freien Personen werden als solche erkannt.

Aus einer großen Bevölkerung, von der 0.1% Tbc-krank sind, wird nun eine zufällig herausgegriffene Person geröntgt un als Tbc-verdächtig eingestuft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person wirklich Tbc-krank ist?

Aufgabe H28 (Bonusaufgabe)

Betrachten Sie folgendes zeitabhängiges System von DGLn

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t-1 & t-1 \\ -(t+2) & t-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

Machen Sie den Ansatz

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ -y_1(t) \end{pmatrix}$$

und stellen Sie eine Vermutung auf, wie eine Lösung lauten könnte. Verifizieren Sie dann Ihre Vermutung durch Nachprüfen.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!