Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
M. Slassi
H. Schäfer

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
23.11.2009

7. Übungsblatt zur „Mathematik III für BI, BSc. WI/BI, MaWi, AngGeo, UI“

Gruppenübung

Aufgabe G19 (Fourier-Reihe)
Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Funktion

$$f(x) = |\sin x|, \qquad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Hinweis: $\sin(x)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\sin(x - nx) + \sin(x + nx))$

Aufgabe G20 (Randwertproblem)
Betrachten Sie die DGL

$$y'' + y' = \exp(x).$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine homogene Lösung.
(b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung mit der Operatormethode.
(c) Es seien Randwerte $y(0) = 1$ und $y(1) = 0$ gegeben. Ist die DGL mit diesen Randwerten lösbar?

Aufgabe G21 (Fundamentalsystem)
Sei ein System erster Ordnung

$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$$

gegeben. Sei $A \in \mathbb{R}^{3,3}$. A habe den dreifachen Eigenwert λ. Es gebe aber nur zwei unabhängige Eigenvektoren v_1 und v_2. Sei v_{Haupt} ein Hauptvektor zweiter Stufe von A, der linear unabhängig zu v_1 und v_2 ist. Dann bezeichnet

$$C_1 \exp(\lambda x) v_1 + C_2 \exp(\lambda x) v_2 + C_3 \exp(\lambda x)\left[v_{Haupt} + x(A - \lambda E)v_{Haupt}\right]$$

für $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung des Systems. Zeigen Sie, dass

$$\exp(\lambda x)\left[v_{Haupt} + x(A - \lambda E)v_{Haupt}\right]$$

eine Lösung des Systems ist.

Hausübung

Aufgabe H19 (Fourier-Reihe)

Sei f eine 2π-periodische Funktion und gegeben durch

$$f(x) = \sin\left(\tfrac{x}{2} + \tfrac{\pi}{2}\right) \qquad -\pi \leq x < \pi.$$

(a) Skizzieren Sie diese Funktion und zeigen Sie, dass sie gerade ist.

(b) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe FR der Funktion f.

Hinweis: $\int \sin(ax+c)\cos(bx)dx = \frac{b}{b^2-a^2}\sin(ax+c)\sin(bx) + \frac{a}{b^2-a^2}\cos(ax+c)\cos(bx)$

Aufgabe H20 (Operatormethode)

Bestimmen Sie eine spezielle Lösung der DGL

$$y''' + 3y'' + 2y' = \exp(2x)$$

durch Anwendung der Operatormethode.

Aufgabe H21 (Randwertproblem)

Betrachten Sie folgendes Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y),\ y(a) = b.$$

Es sei angenommen, dass die Funktion f die Voraussetzungen aus dem Satz von Picard-Lindelöf erfüllt. Warum ist es dann in Ordnung, das Anfangswertproblem durch Raten einer Lösung und anschließendes Überprüfen zu lösen? Warum ist dieses Vorgehen bei Randwertproblemen im Allgemeinen nicht möglich?