Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
M. Slassi
H. Schäfer

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
16.11.2009

6. Übungsblatt zur „Mathematik III für BI, BSc. WI/BI, MaWi, AngGeo, UI“

Gruppenübung

Aufgabe G16 (System erster Ordnung)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\overrightarrow{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overrightarrow{y}.$$

Hinweis: Siehe Ergänzungsskript.

Aufgabe G17 (Beweisorama)
Sei A eine $n \times n$-Matrix. Weiter seien λ_1 und λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, Eigenwerte von A mit zugehörigen Eigenvektoren v_1 und v_2. Zeigen Sie, dass v_1 und v_2 linear unabhängig sind.

Aufgabe G18 (Fundamentalsystem)
Es sei das System erster Ordnung

$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bilden

$$\exp(3x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \exp(2x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \exp(2x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem?

Hausübung

Aufgabe H16 (Eigenvektorbasis)

Nicht jede $n \times n$-Matrix A ist diagonalisierbar. Dies liegt daran, dass nicht zu jeder Matrix eine Basis aus Eigenvektoren existiert. Machen Sie plausibel, dass genau dann keine Eigenvektorbasis existiert, wenn für die folgende Summe über alle Eigenwerte λ

$$\sum_{\lambda} dim(\mathrm{Kern}(A - \lambda I)) < n$$

gilt.

Aufgabe H17 (Hauptvektoren)

Sei A eine $n \times n$-Matrix. Für $m = 1, 2, \ldots, n$ nennt man $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ einen Hauptvektoren m-ter Stufe zum Eigenwert λ, falls

$$(A - \lambda I)^m \overrightarrow{v} = 0$$

für einen Eigenwert λ gilt. Besitzt A keine Eigenvektorbasis, so lassen sich aber die Eigenvektoren durch Hauptvektoren zu einer Basis ergänzen. Finden Sie eine Basis aus Hauptvektoren für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H18 (Randwertproblem)

Hat folgendes Randwertproblem eine reelle Lösung?

$$4y'' + y = 0, y(0) = 0 \text{ und } y(\pi) = 1.$$

Wenn ja, bestimmen Sie diese.