Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. C. Herrmann
M. Slassi
H. Schäfer

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
9.11.2009

5. Übungsblatt zur „Mathematik III für BI, BSc. WI/BI, MaWi, AngGeo, UI“

Gruppenübung

Aufgabe G13 (Lineare DGL zweiter Ordnung)
Wir berachten die Differentialgleichung

$$y'' - \frac{x+2}{x} y' + \frac{y}{x} = 0.$$

(a) Welche der folgenden Funktionspaare bilden ein Fundamentalsystem dieser Gleichung?

(i) $y_1(x) = e^x(x-2), \quad y_2(x) = 3x + 6.$

(ii) $y_1(x) = e^x(x-2), \quad y_2(x) = x - 3.$

(iii) $y_1(x) = e^x(x-2), \quad y_2(x) = 4 + 2x - 2e^x + xe^x.$

(b) Bestimmen Sie nun diejenige Lösung der obigen Gleichung, welche zusätzlich den Anfangsbedingungen $y(2) = 8, y'(2) = 2 + e^2$ genügt.

Aufgabe G14 (Ansatz vom Typ der rechten Seite)
Sei eine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten und rechter Seite

$$b(x) = p(x) \exp(\lambda x)$$

für ein relles Polynom $p(x)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Für eine spezielle Lösung $y_s(x)$ der DGL machen wir den Ansatz

$$y_s(x) = x^k q(x) \exp(\lambda x)$$

für ein relles Polynom $q(x)$ mit $grad(q(x)) = grad(p(x))$. Die Zahl k gibt dabei an, wie oft λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = e^x.$$

Aufgabe G15 (Eigenwerte und Eigenvektoren)
Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und finden Sie eine Matrix D die zu A diagonalähnlich ist.

Hausübung

Aufgabe H13 (Lineare DGL höherer Ordnung)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden DGLn:

(a) $y''' - y'' = y - y'$.

(b) $y^{(4)} - 2y^{(3)} + y^{(2)} = 0$.

Aufgabe H14 (Ansatz vom Typ der rechten Seite)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'' - y = x \exp(2x)$$

Aufgabe H15 (Multiple Choice)
Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Falls angegeben, begründen Sie Ihre Antwort.

1. Sei A eine $n \times n$-Matrix.
(a) Gilt $det(A) = 0$, so ist A invertierbar.
(b) Gilt $det(A) \neq 0$, so ist A nicht invertierbar.
(c) Es sei außerdem eine invertierbare Matrix V gegeben, sodass $VAV^{-1} = D$ eine Diagonalmatrix ist. Dann ist A invertierbar. (Begründung!)

2. Sei $W(x)$ die Wronski-Matrix zu einer gegebenen linearen DGL über dem Intervall I. Gilt $det(W(x)) = 0$ für alle $x \in I$, so sind die Fundamentallösungen linear abhängig. (Begründung!)

3. Betrachte die DGL

$$y'' - y' = 2y.$$

Diese DGL lässt sich in ein System erster Ordnung überführen. (Begründung!)