



3. Übungsblatt zur „Mathematik III für BI, BSc. WI/BI, MaWi, AngGeo, UI“

Gruppenübung

Aufgabe G7 (Euler-Verfahren)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = 1 + x + y^3, \quad y(0) = 0.$$

Bestimmen Sie näherungsweise $y(0.2)$ durch Anwendung des Euler-Verfahrens mit Schrittweite $h = 0.1$.

Aufgabe G8 (Potenzreihenansatz)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + (1 - x)y - 1, \quad y(0) = 1$$

für $-1 < x < 1$ mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

- Berechnen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 der Potenzreihe.
- Leiten Sie aus (a) eine Vermutung bezüglich der Werte der Koeffizienten a_n für $n \in \mathbb{N}_0$ ab. Wie lautet die Lösung, wenn Ihre Vermutung richtig ist? Machen Sie die Probe.

Hinweis: Für das Produkt zweier absolut konvergenter Reihen gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_{n-m} b_m.$$

Aufgabe G9 (DGL zweiter Ordnung)

- Transformieren Sie die DGL

$$y'' + y' = x + 2$$

in eine lineare DGL. Wie kann diese lineare DGL gelöst werden?

- Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y \cdot (y')^3 = 0$$

durch Angabe der Umkehrfunktion $x(y)$.

Hausübung

Aufgabe H7 (Euler-Verfahren)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + (1 - x)y - 1, \quad y(0) = 1$$

für $-1 < x < 1$. Runden Sie bei den folgenden Rechnungen sämtliche Zwischenergebnisse auf 3 Nachkommastellen.

- Bestimmen Sie einen Näherungswert für $y(0.3)$ durch Anwendung des Euler-Verfahrens mit Schrittweite $h = 0.1$.
- Beurteilen Sie Ihren Näherungswerte aus (a) aufgrund eines Vergleichs mit dem exakten Wert (Vgl. Aufgabe G8).

Aufgabe H8 (Potenzreihenansatz)

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes für die Lösung $y(x)$ sowie der Potenzreihe für die Sinusfunktion die ersten sieben Glieder der Potenzreihe der Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems

$$y' = \sin(x) \cdot y, \quad y(0) = 1.$$

Vergleichen Sie das so erhaltene Polynom $P_5(x)$ 5. Grades mit der exakten Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems (Trennung der Veränderlichen!), indem Sie sowohl $y(\frac{1}{2})$ als auch $P_5(\frac{1}{2})$ berechnen.

Hinweis: Stellen Sie $\sin(x)$ als Reihe dar.

Aufgabe H9 (Picard-Lindelöf-Iteration)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 2y, y(0) = 1$$

auf $[0, \infty)$. Prüfen Sie nach, dass die Picard-Lindelöf-Iteration angewendet werden kann. Berechnen Sie dann die ersten drei Iterierten. Beginnen Sie die Iteration mit der Funktion $y_{[0]}(x) = 1$.