



2. Übungsblatt zur „Mathematik III für BI, BSc. WI/BI, MaWi, AngGeo, UI“

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Bernoullische Differentialgleichungen)

Gegeben sei die Bernoullische Differentialgleichung

$$e^x y' = -\frac{1}{3}e^x y - \frac{1}{3}y^4.$$

- Transformieren Sie diese Differentialgleichung in eine lineare Differentialgleichung.
- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe G5 (Exakte DGL)

Erläutern Sie die Bedeutung des integrierenden Faktors. Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor für die Differentialgleichung

$$(xy^2 - y^3)dx + (1 - xy^2)dy = 0,$$

und bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung. Motivieren Sie Ihr Vorgehen.

Hinweis: Der integrierende Faktor μ sollte als Funktion nur von y , $\mu = \mu(y)$ gewählt werden.

Aufgabe G6 (Existenz und Eindeutigkeit)

- Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{x|y|}, \quad y(1) = 0$$

mit $x \geq 0$. Bestimmen Sie durch Anwendung des Satzes von Peano in Bezug auf das Rechteck $R = [0, 4] \times [-4, 4]$ ein Intervall, auf dem eine Lösung des Anfangswertproblems existiert.

Hinweis: Es wird nicht verlangt, dass Sie eine Lösung des Anfangswertproblems berechnen. Beachten Sie bitte auch, dass nichts über die Eindeutigkeit der Lösung gesagt wird.

- Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = y \cdot e^{x^2-9} \cdot \sin(x^3 + 2), \quad y(2) = 1$$

genau eine Lösung auf dem Intervall $[-1, 3]$ besitzt.

Hausübung

Aufgabe G7 (Exakte DGL)

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$3x^3\sqrt{x^4+1}(\ln y+2)dx + \frac{1}{2y}\sqrt{(x^4+1)^3}dy = 0$$

exakt ist, und finden Sie die allgemeine Lösung.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$(2xy \ln y)dx + (x^2 - 2 \ln y)dy = 0$$

nicht exakt ist, finden Sie einen integrierenden Faktor, und bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

Hinweis: Wählen Sie den integrierenden Faktor nur als Funktion von y .

Aufgabe G8 (Bernoullische Differentialgleichungen)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung

$$y' + y = y^3 \sin(x).$$

Aufgabe G9 (Lineare DGL)

Bestimmen Sie alle Lösungen der linearen Differenzialgleichung

$$y' - \frac{x}{1+x^2}y = 2\sqrt{1+x^2}.$$