Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Kiehl
S. Drewes
S. Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
12.02.2010

14. Übungsblatt
Mathematik III für MB, WI/MB, MPE, AngMech

Gruppenübung

Aufgabe G1

Lösen Sie das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{für } x \in (0,1),\ y \in (0,1), \\ u(0,y) = \sin(2\pi y),\ u(1,y) &= \sinh(\pi)\sin(\pi y) + \cosh(2\pi)\sin(2\pi y) && \text{für } y \in (0,1), \\ u(x,0) = 0,\ u(x,1) &= 0 && \text{für } x \in (0,1), \end{aligned}$$

mit Hilfe eines Produktansatzes.

Aufgabe G2

Lösen Sie das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{für } x \in (0,1),\ y \in (0,1), \\ u(0,y) = 0,\ u(1,y) &= \sin(2\pi y) && \text{für } y \in (0,1), \\ u(x,0) = 0,\ u(x,1) &= 0 && \text{für } x \in (0,1), \end{aligned}$$

mit Hilfe eines Produktansatzes.

Aufgabe G3

Es sei

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], t = 0\}, \quad \Gamma_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], t = 1\}, \\ \Gamma_3 &= \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1], x = 1\}, \quad \Gamma_4 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1], x = 0\} \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung

$$u_t = \frac{1}{2} u_{xx},\ x \in [0,1],\ t \in [0,1],$$

besitzt für alle $g \in C^2(\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4)$

genau eine Lösung u mit $u = g$ auf $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$.	richtig ☐	falsch ☐
höchstens eine Lösung u mit $u = g$ auf $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$.	richtig ☐	falsch ☐
unendliche viele Lösungen mit $u = g$ auf Γ_1.	richtig ☐	falsch ☐
höchstens eine Lösung u mit $u = g$ auf $\Gamma_1 \cup \Gamma_4$.	richtig ☐	falsch ☐
genau eine Lösung u mit $u = g$ auf $\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$.	richtig ☐	falsch ☐

Aufgabe G4

Die folgenden Differentialgleichungen sind

	elliptisch	hyperbolisch	parabolisch
$0 = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	[ ]	[ ]	[ ]
$0 = 1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	[ ]	[ ]	[ ]
$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	[ ]	[ ]	[ ]
$0 = y^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	[ ]	[ ]	[ ]

Aufgabe G5

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= u_{xx}(t,x) + \sin(\pi x), \quad u(x,0) = \sin(2\pi x), \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, \quad t > 0, \quad x \in (0,1). \end{aligned}$$

Aufgabe G6

Lösen Sie das folgende Problem mit Hilfe der Laplacetransformation:

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Aufgabe G7

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}.$$

Probe: Es gilt $\prod_{i=1}^{3} \lambda_i = 4$ und alle Eigenvektoren sind orthogonal zueinander.

b) Bestimmen sie diejenige Lösung, die die Anfangsbedingung

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

Probe: $\vec{y}(\pi) \approx \begin{pmatrix} 286705 \\ 286774 \\ 286774 \end{pmatrix}$