Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Kiehl
S. Drewes
S. Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
05.02.2010

13. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB, WI/MB, MPE, AngMech“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Formel von d'Alembert)

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems nach der Formel von d'Alembert:

$$\begin{array}{lll} u_{tt} = 4u_{xx} & & x \in (0, 2\pi), t > 0 \\ u(x,0) = \sin(x), & u_t(x,0) = \sin(x)\cos(x) & x \in (0, 2\pi). \end{array}$$

Aufgabe G2 (Potenzreihenansatz)

Sei $G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$. Lösen Sie das Dirichletproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{für } (x,y) \in G \\ u(x,y) &= x^2 - xy && \text{für } (x,y) \in \partial G \end{aligned}$$

mit dem Potenzreihenansatz.

Aufgabe G3 (Wiederholung: Trennung der Variablen)

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = x\,(1 + y^2), \quad y(0) = 0$$

durch Trennen der Veränderlichen.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \cos(x + y)$$

durch die Substitution $z(x) = x + y(x)$ und anschließender Trennung der Veränderlichen.

Aufgabe G4 (Wiederholung: Multiple Choice)

(a) Die Differentialgleichung

$$2xy' + x^2y + 6x^3e^x = 0$$

ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung.	richtig	☐	falsch	☐
ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung.	richtig	☐	falsch	☐
ist eine lineare Differentialgleichung.	richtig	☐	falsch	☐
ist eine homogene lineare Differentialgleichung.	richtig	☐	falsch	☐
ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung.	richtig	☐	falsch	☐
besitzt unendlich viele Lösungen.	richtig	☐	falsch	☐
besitzt eine eindeutige Lösung.	richtig	☐	falsch	☐

(b) Sind folgenden Funktionensysteme linear unabhängig über $\mathbb{R}$?

$y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = x^3$	richtig	☐	falsch	☐
$y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \cos x$, $y_3(x) = \sin x + \cos x$	richtig	☐	falsch	☐

Hausübung

Aufgabe H1 (Formel von d'Alembert)

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblemes nach der Formel von d'Alembert:

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{9}u_{tt} = u_{xx} & & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}, & u_t(x,0) = \frac{1}{1-x^2} & x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Hinweis: $\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Aufgabe H2 (Potenzreihenansatz)

Sei $G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$. Lösen Sie das Dirichletproblem

$$\begin{array}{ll} \Delta u = 6x + 12y^2 & \text{für } (x,y) \in G \\ u(x,y) = 3xy^2 - 2x + 6x^2 - 7x^4 & \text{für } (x,y) \in \partial G \end{array}$$

mit dem Potenzreihenansatz.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst (z.B. durch scharfes Hinsehen) eine Partikulärlösung und transformieren Sie das Problem in ein homogenes.

Aufgabe H3 (Wiederholung: Multiple Choice)

(a) Sind die folgenden Differenzialgleichungen exakt?

$\left(\frac{y^2}{2t} - \cos t\right) dt + \left(y \ln t + \frac{y^3}{2}\right) dy = 0$	☐ richtig	☐ falsch
$y^2 dt - 2yt dy = 0$	☐ richtig	☐ falsch
$t^2 \sin y dt + \frac{t^3 \cos y - y^2}{3} dy = 0$	☐ richtig	☐ falsch

(b) Wozu benötigt man einen integrierenden Faktor?

(i) ☐ um die homogene Lösung zu finden.

(ii) ☐ um eine nicht exakte DGL exakt zu machen.

(iii) ☐ um die Lipschitzkonstante zu berechnen.

(iv) ☐ um die Variablen trennen zu können.

Diese Hausaufgaben werden nicht mehr korrigiert!