Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Kiehl
S. Drewes
S. Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
22.01.2009

11. Übungsblatt
Mathematik III für MB, WI/MB, MPE, AngMech

Gruppenübung

Aufgabe G1

Gegeben sei das Randwertproblem:

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x + 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 2. \tag{1}$$

(a) Ermitteln Sie eine partikuläre Lösung von (1).

(b) Transformieren Sie (1) anhand des Ergebnisses aus (a) in ein halbhomogenes Randwertproblem mit homogener Differentialgleichung.

(c) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die homogene Lösung von (1).

(d) Geben Sie die Lösung von (1) an.

Aufgabe G2

Gegeben sei das vollhomogene Randwertproblem

$$y''(x) + 2y'(x) - \lambda y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) + y'(\pi) = 0, \tag{1}$$

wobei λ ein Parameter ist.

Man nennt Probleme dieser Art *Eigenwertprobleme*. Eigenwertprobleme besitzen immer die triviale Lösung $y \equiv 0$. Es hängt von λ ab, ob es noch weitere Lösungen gibt. Diejenigen λ, für die das Randwertproblem nicht triviale Lösungen besitzt, heißen *Eigenwerte* des Randwertproblems. Die zugehörigen Lösungen heißen *Eigenfunktionen* zum Eigenwert λ.

Um die Eigenwerte und Eigenfunktionen von (1) zu bestimmen, führen Sie folgende Schritte durch:

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von λ Lösungsfundamentalsysteme für (1).
(*Hinweis:* Beschränken Sie sich dabei auf Eigenwerte $\lambda < -1$.)

(b) Stellen Sie die Matrix R und den Vektor γ auf und ermitteln Sie anhand der Bedingung $\det R = 0$ diejenigen λ, für die das Randwertproblem Lösungen besitzt.

Aufgabe G3

Gegeben sei das Randwertproblem:

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad y(0) = \alpha, \quad y'(\frac{3}{4}\pi) = \beta. \tag{1}$$

(a) Für welche α, $\beta \in \mathbb{R}$ ist (1) lösbar?

(b) Bestimmen Sie zu $\beta = 0$ die Zahl α, so dass (1) lösbar ist und geben Sie die Lösung(en) an.

Hausübung

Aufgabe H1

Lösen Sie das Randwertproblem

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x^2 - 5,$$
$$y(0) - y'(0) = 1, \quad -y(0) + 2y''(0) = 2, \quad 2y(1) - 3y'(1) - y''(1) = 0.$$

Probe: $y(1) \approx 5.2529$

Aufgabe H2

Für welche λ ist das Eigenwertproblem

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) - y'(0) = 0, \quad y(\pi) - y'(\pi) = 0$$

lösbar?
Geben Sie in Abhängigkeit von λ alle Eigenfunktionen an.
*Hinweis:*Unterscheiden Sie die drei Fälle $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$.
Beachten Sie, dass die triviale Lösung $y \equiv 0$ keine Eigenfunktion ist.

Aufgabe H3

Es sei ein Balken der Länge l gegeben, der an beiden Enden getragen und mit einer konstanten Last belegt wird. Für kleine Durchbiegungen folgt für die Biegelinie $y(x)$ die Differenzialgleichung

$$y'' = -m.$$

Untersuchen Sie für die folgenden Fälle, ob keine, eine oder mehrere Lösungen des Randwertproblems existieren:

(i) Die Enden des Balkens werden fest gestützt, also $y(0) = y(l) = 0$.

(ii) Die Enden des Balkens werden fest eingespannt, aber in der Höhe verstellbar: $y'(0) = 0$, $y'(l) = -lm$.

(iii) Wie in (ii), aber mit $y'(0) = y'(l) = 0$.

(iv) Der Balken ist links gestützt ($y(0) = 0$) und rechts eingespannt ($y'(l) = 0$).

Geben Sie jeweils die Lösungen an.

Abgabe: **29.01.2009** in der jeweiligen Gruppenübung