Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Kiehl
S. Drewes
S. Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/10
27.11.2009

6. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB, WI/MB, MPE, AngMech“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lineare DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten)

Gegeben sei das folgende Differenzialgleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 2x + 3y + 27e^{5t}, \\ y' & = & 6x - y. \end{array}\right.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des dazugehörigen homogenen Systems.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems.

c) Seien Anfangswerte $x(0) = 4$ und $y(0) = -2$ gegeben. Bestimmen Sie die Lösung dieses Anfangswertproblems.

Aufgabe G2 (Lineare DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten)

Bestimmen Sie die reelle Lösung des Anfangswertproblems

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{dx}{dt} & = & 2x + y - 2z, \\ \frac{dy}{dt} & = & -x, \\ \frac{dz}{dt} & = & x + y - z \end{array}\right. \qquad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G3 (Lineare DGL-Systeme und Jordan-Normalform)

Bestimmen Sie die Jordannormalform der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

und zusätzlich die Eigenvektoren und Hauptvektoren der Matrix B.

Bestimmen Sie weiter die allgemeine homogene Lösung von

$$y' = By.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Lineare DGL n-ter Ordnung)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = \cos(x), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und berechnen Sie dessen Nullstellen.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung durch Angabe eines Fundamentalsystems.

c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung durch einen speziellen Ansatz und geben Sie die gesamte allgemeine Lösung an.
Hinweis: Welcher Ansatz für die partikuläre Lösung eignet sich ganz gut bei dieser Inhomogenität?

d) Bestimmen sie die Konstanten gemäß der Anfangsbedingungen.

Aufgabe H2 (Lineare DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten)

Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{-t} + e^t \\ te^{-t} - e^t \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Benutzen Sie zur Bestimmung einer partikulären Lösung den Ansatz

$$\vec{y}_p(t) = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1 t)e^{-t} + c_1 e^t \\ (a_2 + b_2 t)e^{-t} + c_2 e^t \end{pmatrix}.$$

Koeffizientenvergleich führt zur drei Systemen von je zwei Gleichungen in c_1 und c_2, b_1 und b_2, sowie a_1 und a_2, die jeweils die gleiche Koeffizientenmatrix haben und sich in dieser Reihenfolge leicht lösen lassen.

Abgabe: **04.12.2009** in der jeweiligen Gruppenübung