



### 3. Übungsblatt

## Mathematik III für MB, WI/MB, MPE, AngMech

### Gruppenübung

#### Aufgabe G1

(a) Sind die folgenden Differenzialgleichungen exakt?

$$\left(\frac{y^2}{2t} - \cos t\right) dt + \left(y \ln t + \frac{y^3}{2}\right) dy = 0 \quad \square \quad \text{ja} \quad \square \quad \text{nein}$$

$$y^2 dt - 2yt dy = 0 \quad \square \quad \text{ja} \quad \square \quad \text{nein}$$

$$t^2 \sin y dt + \frac{t^3 \cos y - y^2}{3} dy = 0 \quad \square \quad \text{ja} \quad \square \quad \text{nein}$$

(b) Wozu benötigt man einen integrierenden Faktor?

- i.  um die homogene Lösung zu finden.
- ii.  um eine nicht exakte DGL exakt zu machen.
- iii.  um die Lipschitzkonstante zu berechnen.
- iv.  um die Variablen trennen zu können.

#### Aufgabe G2

Für das Anfangswertproblem  $y' = x \cdot y$ ,  $y(0) = 1$  berechnen Sie 3 sukzessive Näherungslösungen (Picard-Iteration) mit  $y_0 = y(0) = 1$ . Vergleichen Sie zusätzlich die gefundene Approximation mit der exakten Lösung.

### Aufgabe G3

Bestimmen Sie die Koeffizienten  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  in der Reihenentwicklung

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

für die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = x^2 y + 1, \quad y(0) = 0.$$

*Probe:*  $a_{10} = \frac{1}{280}$

### Aufgabe G4

Für das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 + y^2 x - y^3, \quad y(0) = 0,$$

zeige man mittels des Satzes von Picard–Lindelöf, dass genau eine Lösung auf dem Intervall  $J = [-1/3, 1/3]$  existiert. Man nutze weiter das Iterationsverfahren mit der Startfunktion  $u_0(x) = 0$  und bestimme  $u_2$ .

**Hinweis:** Sie können den Satz 6 auf Folie 79 und die Bemerkung 6 auf Folie 86 nutzen.

## Hausübung

### Aufgabe H1

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + (1 - x)y - 1, \quad y(0) = 1$$

für  $-1 < x < 1$  mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

- Berechnen Sie die Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_5$  der Potenzreihe.
- Leiten Sie aus (a) eine Vermutung bezüglich der Werte der Koeffizienten  $a_n$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  ab. Wie lautet die Lösung, wenn Ihre Vermutung richtig ist? Machen Sie die Probe.

### Aufgabe H2

- Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{x|y|}, \quad y(1) = 0$$

mit  $x \geq 0$ . Bestimmen Sie durch Anwendung des Satzes von Peano in Bezug auf das Rechteck  $J \times D = [0, 2] \times [-2, 2]$  ein Intervall, auf dem eine Lösung des Anfangswertproblems existiert.

**Hinweis:** Es wird nicht verlangt, dass Sie eine Lösung des Anfangswertproblems berechnen. Beachten Sie bitte auch, dass nichts über die Eindeutigkeit der Lösung gesagt wird.

- Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = y \cdot e^{x^2-25} \cdot \sin(x^3 + 2), \quad y(2) = 1$$

genau eine Lösung auf dem Intervall  $[-1, 5]$  besitzt.

**Hinweis:** Es wird nicht verlangt, dass Sie eine Lösung des Anfangswertproblems berechnen.

### Aufgabe H3

Ein kugelförmiger Tank mit Radius  $R$  sei zur Hälfte mit Wasser gefüllt. Auf der Unterseite des Tanks ist ein Loch mit Radius  $r$ , durch das das Wasser unter dem Einfluss der Schwerkraft nach und nach aus dem Tank fließt. Bestimmen Sie für jeden Zeitpunkt  $t$  die Wassertiefe (eine implizite Gleichung genügt), und berechnen Sie, nach welcher Zeit das Wasser vollständig aus dem Tank geflossen ist.

*Hinweis:* Wir gehen davon aus, dass  $r$  gegenüber  $R$  so klein ist, dass der Tank einer Kugel und nicht einer Kugel mit abgeschnittener Kappe entspricht.

Zur Berechnung wird das *Gesetz von Torricelli* benötigt, das die Geschwindigkeit einer durch eine Öffnung abfließende Flüssigkeit mit

$$v = \sqrt{2gh}$$

angibt, wobei  $g$  die Gravitationsbeschleunigung ist und  $h$  die Höhe des Flüssigkeitsspiegels über der Öffnung angibt.

Damit können Sie das Volumen  $dV$  an Wasser, das in einem kleinen Zeitintervall  $dt$  abfließt, auf zwei Arten berechnen. Wenn zum Zeitpunkt  $t$  der Wasserspiegel  $y$  gegeben ist, können Sie einerseits mit dem Gesetz von Torricelli bestimmen, wieviel Wasser durch das Loch mit Radius  $r$  abfließt. Andererseits können Sie mit dem Radius  $x$  des Flüssigkeitsspiegels zum Zeitpunkt  $t$ , wenn der Flüssigkeitsspiegel um  $dy$  abnimmt, das Volumen mit  $dV = \pi x^2 dy$  abschätzen. Mit diesen beiden Ansätzen können Sie eine DGL modellieren.

Abgabe: **13.11.2009** in der jeweiligen Gruppenübung