Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Kiehl
S. Drewes
S. Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
WS 2009/10
30.10.2009

2. Übungsblatt
Mathematik III für MB, WI/MB, MPE, AngMech

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Ähnlichkeits-DGL)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' = 1 - \sin^2(\frac{y}{x}) + \frac{y}{x}.$$

(b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y^2 + x^2}{xy}, \quad x > 0, \quad y(2) = 4.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ (Ähnlichkeitsdifferenzialgleichung).

Aufgabe G2 (Lipschitzbedingung)

Es sei $I := [0, \infty]$. Weiter sei A die Aussage: $f(x, y)$ erfüllt eine Lipschitzbedingung in y auf dem Intervall I. Kreuzen Sie die richtigen Aussage an.

	A ist wahr	A ist falsch
$f(x,y) = x^2 \cdot y$	[ ]	[ ]
$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2} \cdot y$	[ ]	[ ]
$f(x,y) = \frac{1}{1-x} \cdot y$	[ ]	[ ]
$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2} \cdot y^2$	[ ]	[ ]
$f(x,y) = x^2 + 2y$	[ ]	[ ]

Aufgabe G3 (Exakte DGL)

Überprüfen Sie, ob die folgenden DGLs exakt sind und bestimmen Sie ggf. die allgemeine Lösung.

(a) $y \,\mathrm{dt} + t \,\mathrm{dy} = 0, \quad (t, y) \in D = \mathbb{R}^2$

(b) $-\left(y + \frac{1}{t-1}\right) \mathrm{dt} + (2y - t) \,\mathrm{dy} = 0, \quad (t, y) \in D =]-1, 1[\times \mathbb{R}$

Aufgabe G4 (Integrierender Faktor)

Man integriere die folgende Diffenzialgleichung, indem man sie durch Bestimmung eines integrierenden Faktors $M(t, y)$ in eine exakte Diffenzialgleichung überführt.

$$3y^2 \,\mathrm{dt} + 2ty \,\mathrm{dy} = 0 \quad , \quad t, y > 0$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Lipschitzbedingung)
Bestimmen Sie für $\Phi : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}(-2x^3 + y^4 + 2) \\ \frac{1}{25}(x^3 + xy + 2y^2 - 5) \end{pmatrix}$$

eine Lipschitzkonstante.

Aufgabe H2 (Bernoullische DGL)
Gegeben sei die Bernoullische Differenzialgleichung

$$e^x y' = -\frac{1}{3}e^x y - \frac{1}{3}y^4.$$

(a) Transformieren Sie diese Differenzialgleichung in eine lineare Differenzialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung.

Aufgabe H3 (Integrierender Faktor)
Man integriere die folgende Diffenzialgleichung, indem man sie durch Bestimmung eines integrierenden Faktors $M(t,y)$ in eine exakte Diffenzialgleichung überführt.

$$(1+y)\,\mathrm{dt} - t\,\mathrm{dy} = 0 \qquad , t, y > 0$$

Aufgabe H4 (Lineare DGL)
Bestimmen Sie alle Lösungen der linearen Differenzialgleichung

$$y' - \frac{x}{1+x^2}y = 2\sqrt{1+x^2}.$$

Abgabe: **06.11.2008** in der jeweiligen Gruppenübung