

Kapitel 7

Elemente der linearen Algebra

7.1 Der euklidische Raum \mathbb{R}^n

Definition 7.1.1. Unter dem *Raum* \mathbb{R}^n versteht man das kartesische Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (n -mal), d.h. die Menge aller n -Tupel (x_1, x_2, \dots, x_n) reeller Zahlen x_k ; kurz:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_k \in \mathbb{R} \text{ für } k = 1, \dots, n\}. \quad (7.1)$$

Die Komponenten x_k heißen *Koordinaten* von x . Zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ sind gleich, falls $x_k = y_k$ für alle $k = 1, \dots, n$ gilt.

Addition, sowie *Multiplikation mit Skalaren* sind komponentenweise erklärt, d.h.

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \text{ für } x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bemerkungen 7.1.2:

- (i) Aus erst später ersichtlichen rechnerischen Gründen wollen wir Elemente $x \in \mathbb{R}^n$ normalerweise als Spalten schreiben. Zeilenvektoren sind dann die Transponierten dazu:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$$

- (ii) Jedes Element $x \in \mathbb{R}^n$ definiert einen Punkt des \mathbb{R}^n . Oft nennt man Elemente $x \in \mathbb{R}^n$ auch *Vektoren*, obwohl der genaue Zusammenhang etwas komplizierter ist (siehe unten); zur Unterscheidung werden reelle Zahlen als *Skalare* bezeichnet

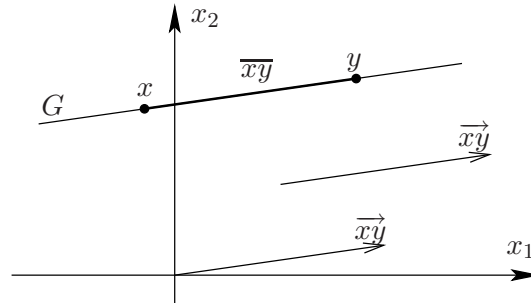
Zusammenhang zum Vektorbegriff.

- (a) *Geraden*. Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq y$ gegeben. Unter der durch die Punkte x und y verlaufenden Gerade versteht man die Menge

$$G = \{x + \lambda(y - x) : \lambda \in \mathbb{R}\} \quad (\text{„Zwei-Punkte-Form“}).$$

- (b) *Strecken*. Wird in der Geraden G der Skalar λ auf den Bereich $0 \leq \lambda \leq 1$ eingeschränkt, so erhält man die Strecke \overline{xy} zwischen den Punkten x und y , also

$$\overline{xy} = \{x + \lambda(y - x) : 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$



- (c) *Vektoren*. Gibt man der Strecke \overline{xy} eine *Orientierung*, indem man etwa x als Anfangs- und y als Endpunkt festlegt, so erhält man den Vektor \overrightarrow{xy} . Dabei werden alle Vektoren als gleich angesehen, die durch Parallelverschiebung ineinander übergehen. Ein Vektor hat also eine definierte Richtung und Länge, jedoch keine feste Lage im Raum.

Jeder Punkt $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ des \mathbb{R}^n lässt sich mit dem Vektor \overrightarrow{OP} identifizieren, der vom Koordinatenursprung $O = (0, 0, \dots, 0)^T$ zum Punkt P führt. Der Vektor \overrightarrow{OP} heißt *Ortsvektor* des Punktes P . Man nennt x_k die Koordinaten des Vektors \overrightarrow{OP} und schreibt

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T.$$

Ein beliebiger Vektor \overrightarrow{xy} stimmt mit dem Ortsvektor des Punktes $y - x$ überein, hat also die *Koordinatendarstellung*

$$\overrightarrow{xy} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)^T$ heißt *Nullvektor*.

Um Abstände und Winkel messen zu können, führen wir folgende Begriffe ein.

Definition 7.1.3. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

die *Euklidnorm* oder der *Betrag* von x und

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

das *innere Produkt* (oder *Skalarprodukt*) von x und y .

Bemerkungen 7.1.4:

- (i) Andere Schreibweisen für $\langle x, y \rangle$ sind $x \cdot y$ oder gelegentlich (x, y) .
- (ii) Die Euklidnorm $\|x\|$ ist die geometrische Länge der Strecke von 0 nach x , d.h. die Länge des Ortsvektors des Punktes x ; entsprechend ist $\|x - y\|$ der Abstand zweier Punkte x und y . Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = 1$ heißt *normiert* oder *Einheitsvektor*.
- (iii) Die wichtigsten Eigenschaften der Euklidnorm sind
- $\|x\| \geq 0$ und $(\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$
 - $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ für $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
 - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ (*Dreiecksungleichung*).
- (iv) Die wichtigsten Eigenschaften des Skalarproduktes sind
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
 - $\langle x, x \rangle \geq 0$, und $\langle x, x \rangle = 0$ nur für $x = 0$
 - $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$,

sowie

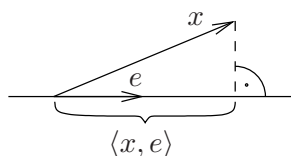
$$\boxed{\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \varphi,}$$

wobei φ der von x und y eingeschlossene Winkel ist. Folglich gilt

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (\text{Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung}).$$

Das Skalarprodukt hat folgende anschauliche Bedeutung:

Bildet man das Skalarprodukt zwischen $x \in \mathbb{R}^n$ und einem Einheitsvektor $e \in \mathbb{R}^n$ (also $\|e\| = 1$), so erhält man die Länge der Projektion von x auf die durch e aufgespannte Gerade bis auf das Vorzeichen. Ist der Winkel zwischen x und e größer als $\frac{\pi}{2}$ ($= 90^\circ$), so ist $\langle x, e \rangle < 0$ und $-\langle x, e \rangle$ die Länge der Projektion.



(Wichtig etwa bei Zerlegung von Kräften: $\vec{F}_e = \langle \vec{F}, \vec{e} \rangle \vec{e}$, \vec{e} Anteil von \vec{F} in Richtung \vec{e})

Gilt $\langle x, y \rangle = 0$, so heißen x und y zueinander senkrecht (*orthogonal*).

7.2 Lineare Unabhängigkeit, Teilräume, Basis und Dimension

Definition 7.2.1. Vektoren $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ heißen *linear unabhängig*, falls gilt:

Aus dem Ansatz $\sum_{k=1}^m \lambda_k a_k = 0$ (mit $\lambda_k \in \mathbb{R}$) folgt stets $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$.

Bemerkung 7.2.2. Die Bedingung sagt gerade, dass die Gleichung $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0$ nach keinem der a_k aufgelöst werden kann. Also sind Vektoren a_1, \dots, a_m genau dann linear abhängig, wenn mindestens ein a_i als Linearkombination der übrigen a_j geschrieben werden kann.

Beispiele 7.2.3:

(a)

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Anschaulich: a_1, a_2, a_3 linear unabhängig, denn die a_k zeigen in Richtung der Koordinatenachsen. Zeige:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Es gilt:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, also sind a_1, a_2, a_3 linear unabhängig.

(b)

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Ansatz:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

$\Rightarrow a_1, a_2$ sind linear unabhängig.

(c)

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

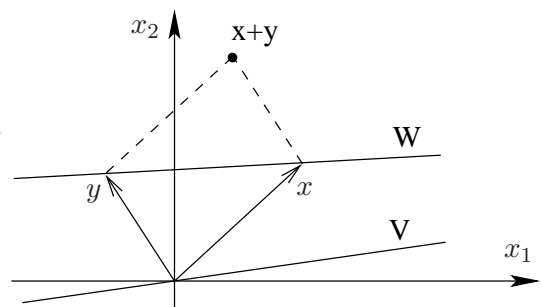
Es ist $a_3 = a_1 + a_2$, also $1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + (-1) \cdot a_3 = 0$. Daraus folgt, dass a_1, a_2, a_3 linear abhängig sind. Geometrisch: a_3 liegt in der Ebene, die von a_1, a_2 aufgespannt wird.

Definition 7.2.4. Eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Teilraum* von \mathbb{R}^n (oder *Unterraum*), wenn Addition und Multiplikation mit Skalaren nicht aus V herausführt, d.h.

$$\boxed{x, y \in V \text{ und } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x + \mu y \in V}$$

Beispiele 7.2.5:

- (a) Im \mathbb{R}^2 : Die Gerade V durch den Ursprung ist Teilraum.
Die Gerade W ist *kein* Teilraum.



- (b) $V \subset \mathbb{R}^3$ mit $V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. V ist Teilraum des \mathbb{R}^3 , denn:
Sei $x, y, \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $z := \lambda x + \mu y$. Dann gilt

$$z_1 + z_2 + z_3 = \lambda(x_1 + x_2 + x_3) + \mu(y_1 + y_2 + y_3) = 0,$$

also $z \in V$.

- (c) $V = \{0\}$ und $V = \mathbb{R}^n$ sind Teilräume des \mathbb{R}^n .

Basis und Dimension.

Jedes Element $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$ darstellen:

$$x = (x_1, 0) + (0, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2.$$

Ebenso durch die Vektoren $e'_1 = (1, 1)$ und $e'_2 = (1, -1)$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} e'_1 + \frac{x_1 - x_2}{2} e'_2.$$

Sowohl $\{e_1, e_2\}$ also auch $\{e'_1, e'_2\}$ bilden deshalb eine sogenannte Basis des \mathbb{R}^2 .

Definition 7.2.6. Sei V ein Teilraum des \mathbb{R}^n . Eine Menge $\{e_1, \dots, e_m\} \subset V$ heißt *Basis* von V , wenn

- (i) e_1, \dots, e_m linear unabhängig sind, und
- (ii) jedes $v \in V$ Linearkombination der e_1, \dots, e_m ist.

Beispiele 7.2.7:

- (a) $\{(1, 0), (0, 1)\}$ ist Basis des \mathbb{R}^2 .

Allgemein ist $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ mit $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ die Standardbasis des \mathbb{R}^n .

zu (i):

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

zu (ii):

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

- (b) $\{(1, 1)\}$ ist keine Basis des \mathbb{R}^2 , denn (ii) verletzt.

- (c) $\{(1, 1), (1, -1), (1, 2)\}$ keine Basis des \mathbb{R}^2 , denn (i) verletzt:

$$(1, 2) = \frac{3}{2}(1, 1) - \frac{1}{2}(1, -1).$$

Die folgende Definition wirkt zunächst einigermaßen willkürlich, erweist sich jedoch als nützlich.

Definition 7.2.8. Der Teilraum $\{0\}$ von \mathbb{R}^n hat die Basis \emptyset .

Bemerkungen 7.2.9:

- (i) $\{e_1, \dots, e_m\} \subset V$ ist genau dann eine Basis von V , wenn jedes $v \in V$ eine *eindeutige* Darstellung als Linearkombination der e_1, \dots, e_m hat.
- (ii) Jede Basis von V hat die gleiche Anzahl von Elementen.

Aufgrund der letzten Bemerkung ist folgende Definition sinnvoll:

Definition 7.2.10. Sei V ein Teilraum des \mathbb{R}^n . Die Anzahl der Elemente einer Basis von V bezeichnet man als *Dimension* von V . Schreibweise: $\dim V$.

Beispiele 7.2.11:

- (a) $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Ermittle Basis von V :

Es ist

$$x \in V \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Also ist jedes $x \in V$ Linearkombination von $e_1 = (1, 0, -1)$ und $e_2 = (0, 1, -1)$.

Da e_1, e_2 linear unabhängig sind, ist $\{e_1, e_2\}$ eine Basis von V . Also gilt $\dim V = 2$.

- (b) $V = \mathbb{R}^n$ hat $\dim V = n$, denn die Standardbasis des \mathbb{R}^n hat n Elemente.

7.3 Lineare Abbildungen und Matrizen

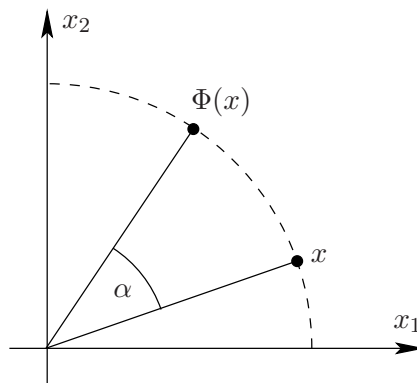
Definition 7.3.1. Eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *lineare Abbildung*, falls gilt:

$$\Phi(\lambda x + \mu y) = \lambda \Phi(x) + \mu \Phi(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 7.3.2. $\Phi(x)$ ist ein Vektor im \mathbb{R}^m , also ist $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \dots, \Phi_m(x))$ mit Komponenten $\Phi_i(x)$. Die Abbildung Φ ist genau dann linear, wenn alle $\Phi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lineare Abbildungen sind.

Beispiele 7.3.3:

- (a) „ k -te Koordinate“. $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(x) = x_k$.
- (b) „Projektion auf x_k -Achse“. $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\Phi(x) = x_k e_k$.
- (c) „Spiegelung an der Winkelhalbierenden“: $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\Phi(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$.
- (d) „Drehung um Winkel α “ : $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\Phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha \\ x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \end{pmatrix}$



$$(e) \quad \Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ mit } \Phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Jede lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist durch Angabe von $m \cdot n$ Koeffizienten eindeutig bestimmt. Um dies einzusehen, sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis des \mathbb{R}^n .

Dann ist $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \dots, \Phi_m(x))$ und

$$\Phi_i(x) = \Phi_i\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k \Phi_i(e_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} x_k, \quad i = 1, \dots, m,$$

mit $\alpha_{ik} := \Phi_i(e_k)$ für $i = 1, \dots, m$ und $k = 1, \dots, n$.

Definition 7.3.4. Ein Schema von Elementen $\alpha_{ik} \in \mathbb{R}$ der Form

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt $m \times n$ -Matrix. Die Menge aller $m \times n$ -Matrizen (mit Elementen aus \mathbb{R}) wird mit $M_{m,n}(\mathbb{R})$ oder kurz $\mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnet.

Schreibweise: $A = (\alpha_{ik}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ oder $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ mit $A = (\alpha_{ik})$. Für $m = n$ heißt A quadratische Matrix. $(\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in})$ heißt i -te Zeile von A , $\begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$ heißt j -te Spalte von A .

Beispiel 7.3.5:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R}),$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \in M_{1,3}(\mathbb{R}), \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}).$$

Bemerkungen 7.3.6:

- (i) Zu jeder Matrix $A = (\alpha_{ik}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ gehört eine eindeutige Abbildung $\Phi_A := \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, definiert durch

$$(\Phi_A(x))_i := \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} x_k, \quad i = 1, \dots, m.$$

Man nennt A die *Abbildungsmatrix* der linearen Abbildung Φ_A bezüglich der Standardbasis.

- (ii) Jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ kann als Matrix mit einer Zeile bzw. einer Spalte aufgefasst werden. Im Zusammenhang mit Matrizen ist es sinnvoll, $x \in \mathbb{R}^n$ als $n \times 1$ -Matrix ($\hat{=}$ Spaltenvektor) anzusehen.
- (iii) Entsprechend der Definition 7.3.4 erklärt man die Menge $M_{m,n}(\mathbb{C})$ der $m \times n$ -Matrizen A mit komplexen Einträgen $\alpha_{ik} \in \mathbb{C}$. Ist die zugrunde liegende Zahlenmenge (\mathbb{R} oder \mathbb{C}) nicht relevant, so schreiben wir kurz $M_{m,n}$.

Definition 7.3.7 (Addition und Multiplikation mit Skalaren). Seien $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ mit $A = (\alpha_{ij}), B = (\beta_{ij})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}). Wir definieren

$$A + B := (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \cdots & \alpha_{1n} + \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} + \beta_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} + \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A := (\lambda \alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_{11} & \cdots & \lambda \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda \alpha_{m1} & \cdots & \lambda \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrizenprodukt.

Seien $\Phi_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\Phi_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ lineare Abbildungen mit zugehörigen Matrizen $A = (\alpha_{ij})$ und $B = (\beta_{ik})$. Welche Matrix gehört zur Hintereinanderschaltung $\Phi_A \circ \Phi_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$? Es ist

$$(\Phi_A(y))_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} y_j \quad \text{und} \quad (\Phi_B(x))_j = \sum_{k=1}^n \beta_{jk} x_k.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (\Phi_A(\Phi_B(x)))_i &= \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} (\Phi_B(x))_j = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \sum_{k=1}^n \beta_{jk} x_k \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_{ij} \beta_{jk} x_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \beta_{jk} \right) x_k. \end{aligned}$$

Also gilt

$$(\Phi_A(\Phi_B(x)))_i = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} x_k \quad \text{mit} \quad \gamma_{ik} := \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \beta_{jk},$$

d.h. es ist $\Phi_A \circ \Phi_B = \Phi_C$ für die Matrix $C = (\gamma_{ik})$. Das legt folgende Definition nahe:

Definition 7.3.8 (Matrizenprodukt). Sei $A = (\alpha_{ij})$ eine $m \times n$ -Matrix und $B = (\beta_{ij})$ eine $n \times p$ -Matrix. Wir definieren das *Produkt* AB als die $m \times p$ -Matrix

$$AB := (\gamma_{ik}) \quad \text{mit} \quad \gamma_{ik} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{jk}, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, p.$$

Ausgeschrieben:

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} \beta_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} \beta_{jp} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{mj} \beta_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^n \alpha_{mj} \beta_{jp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{m1} & \cdots & \gamma_{mp} \end{pmatrix}$$

Bemerkungen 7.3.9:

- (i) AB ist *nur dann* definiert, wenn die Anzahl der Spalten von A mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmt!
- (ii) Die Berechnung von AB merkt man sich als Schema „Zeile \times Spalte“:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{c} k\text{-te Spalte} \\ \text{von } B \text{ (} m \times n \text{)} \\ \downarrow \\ \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \\ \vdots \\ \beta_{mk} \end{array} \\
 & \boxed{m \times m} & \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right) \\
 & & \downarrow \\
 \begin{array}{c} i\text{-te Zeile} \\ \text{von } A \rightarrow \\ (l \times m) \end{array} & \left(\begin{array}{c} \alpha_{i1} \alpha_{i2} \cdots \alpha_{im} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \\ \\ \gamma_{ik} \\ \\ \end{array} \right) \leftarrow \begin{array}{c} i\text{-te Zeile} \\ \text{von } AB \\ (l \times n) \end{array} \\
 & & \uparrow \\
 & & \begin{array}{c} k\text{-te Spalte} \\ \text{von } AB \end{array}
 \end{array}$$

$$\gamma_{ik} = \alpha_{i1}\beta_{1k} + \alpha_{i2}\beta_{2k} + \dots + \alpha_{im}\beta_{mk}.$$

Beispiele 7.3.10:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ -4 & 22 \end{pmatrix}$$

(b) A, B wie in (a)

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -12 \\ 0 & 4 & 10 \\ -9 & -2 & 13 \end{pmatrix}$$

(c) A wie in (a)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB \text{ ist nicht definiert.}$$

(d)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow CD = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad DC = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beachte: auch für quadratische Matrizen gilt i.a. $CD \neq DC$.**Das Matrizenprodukt ist nicht kommutativ.****Rechenregeln**

(i) $A(BD) = (AB)D$ (assoziativ)

(ii) $A(B+C) = AB+AC$ (distributiv)

Dabei sei $A \in M_{n,m}, B, C \in M_{m,l}$ und $D \in M_{l,k}$, damit alle Produkte und Summen definiert sind.

Produkt „Matrix mal Vektor“: Für $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m,n}$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ (oder \mathbb{C}^n) wird das Produkt Ax so definiert, als wenn x eine $n \times 1$ -Matrix ist. D.h.

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j$$

Damit ist die Abbildung $x \rightarrow Ax$ gleich der durch A gegebenen linearen Abbildung Φ_A , d.h. $\Phi_A(x) = Ax$.

Ein „neutrales Element“ bzgl. der Matrizenmultiplikation ist die quadratische *Einheitsmatrix* $I_n \in M_{n,n}$, definiert durch

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{au\ss erhalb der Diagonalen stehen Nullen}).$$

Genauer: $I_n = (\delta_{ij})$ mit dem sogenannten Kroneckersymbol $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{f\"ur } i = j \\ 0 & \text{f\"ur } i \neq j \end{cases}$

Durch Ausmultiplizieren sieht man

$$I_n A = A \quad \text{f\"ur alle } A \in M_{n,m}$$

$$B I_n = B \quad \text{f\"ur alle } B \in M_{k,n}.$$

Wir nennen eine $n \times n$ -Matrix A *invertierbar* (oder *regul\"ar*), wenn es eine Matrix $B \in M_{n,n}$ gibt mit

$$AB = BA = I_n.$$

In diesem Fall hei\ss t B *invers* zu A , und man schreibt A^{-1} statt B .

Bemerkung 7.3.11. Um die Inverse von $A \in M_{n,n}$ zu bestimmen, reicht es aus, eine Matrix $B \in M_{n,n}$ mit $AB = I_n$ zu finden. Dann folgt automatisch die Gleichung $BA = I_n$.

Beispiele 7.3.12:

- (a) In Beispiel 7.3.3 d) haben wir die lineare Abbildung „Drehung der Ebene um den Winkel α “ in \mathbb{R}^2 betrachtet. Die zugeh\"orige Abbildungsmatrix war

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Anschaulich sollte A_α invertierbar sein, wobei die Inverse die Matrix $A_{-\alpha}$ ist, die zur Drehung um $-\alpha$ geh\"ort. Das ist tats\"achlich so, denn es gilt:

$$\begin{aligned} A_\alpha A_{-\alpha} &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & 0 \\ 0 & \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

(b) Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nachrechnen ergibt

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2, \text{ also ist } A^{-1} = B.$$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist *nicht* invertierbar. Annahme: es gibt eine 2×2 -Matrix $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $AB = I_2$.

Dann folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und damit den Widerspruch $0 = 1$.

Satz 7.3.13. Sind $A, B \in M_{n,n}$ invertierbare Matrizen, so ist auch AB invertierbar und es gilt

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.}$$

Man beachte im obigen Satz die Umkehrung in der Reihenfolge der beiden Matrizen!

Definition 7.3.14. Sei $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m,n}$. Die zu A *transponierte Matrix* entsteht aus A durch Vertauschen von Zeilen mit Spalten und wird mit A^T bezeichnet. A^T ist eine $n \times m$ -Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel 7.3.15:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Rechenregeln.

- (i) $(AB)^T = B^T A^T$ für $A \in M_{n,m}$ und $B \in M_{m,l}$
- (ii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T =: A^{-T}$ für invertierbare $A \in M_{n,n}$.

Definition 7.3.16. Sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Dann heißt

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\} & \text{ der Kern von } A, \quad \text{kurz } \ker A. \\ \{Ax \in \mathbb{R}^m : x \in \mathbb{R}^n\} & \text{ das Bild von } A, \quad \text{kurz } \operatorname{Im} A. \end{aligned}$$

Satz 7.3.17. Sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Dann ist $\ker A$ ein Teilraum von \mathbb{R}^n und $\operatorname{Im} A$ ein Teilraum von \mathbb{R}^m .

Beweis: Sind $x, y \in \ker A$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so gilt wegen $Ax = Ay = 0$

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay = 0.$$

Also ist $\lambda x + \mu y$ ebenfalls in $\ker A$ und dieses damit ein Teilraum von \mathbb{R}^n .

Für $x, y \in \text{Im } A$ gibt es nach Definition des Bildes $u, v \in \mathbb{R}^n$ mit $Au = x$ und $Av = y$. Damit gilt für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ wieder wegen $A(\lambda u + \mu v) = \lambda Au + \mu Av = \lambda x + \mu y$, dass auch der Vektor $\lambda x + \mu y$ im Bild von A liegt, dieses also auch ein Teilraum ist. \square

Definition 7.3.18. Man bezeichnet die Dimension von $\ker A$ als *Defekt* von A und die Dimension von $\text{Im } A$ als *Rang von A* , kurz $\text{rg } A$.

Insbesondere der Rang von A ist wichtig zur Lösung von linearen Gleichungssystemen. Ein erster Schritt zur Berechnung von $\text{rg } A$ liefert folgender Satz.

Satz 7.3.19. Sei $A \in M_{m,n}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{rg } A &= \text{maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von } A \\ &= \text{maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen von } A. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also $\text{rg } A = \text{rg } A^T$.

Beispiel 7.3.20:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die ersten zwei Zeilen sind linear unabhängig, alle drei Zeilen nicht. Also gilt $\text{rg } A = 2$.

Zwischen Rang und Defekt besteht folgender Zusammenhang:

Satz 7.3.21. Sei $A \in M_{m,n}$. Dann gilt die *Dimensionsregel*:

$$\dim(\ker A) + \dim(\text{Im } A) = n.$$

Also: Rang von A + Defekt von A = Anzahl der Spalten von A .

Im Beispiel von oben: $\dim(\ker A) = 4 - \text{rg } A = 4 - 2 = 2$.

Man kann am Rang einer $n \times n$ -Matrix erkennen, ob diese invertierbar ist:

Satz 7.3.22 (Invertierbarkeitskriterien). Sei $A \in M_{n,n}$. Dann sind äquivalent:

- (i) A ist invertierbar,
- (ii) $\text{rg } A = n$,
- (iii) $\ker A = \{0\}$,
- (iv) $\text{Im } A = \mathbb{R}^n$,
- (v) Φ_A ist umkehrbar (also bijektiv).

7.4 Lineare Gleichungssysteme

Wir betrachten lineare Gleichungssysteme (kurz LGS) der Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Man fasst die a_{ij} zur *Koeffizientenmatrix* $A = (a_{ij})$ und die b_i zur *rechten Seite* $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

zusammen. Dann lautet das LGS in Matrixschreibweise: $Ax = b$.

Bemerkung 7.4.1. Ist A eine invertierbare Matrix, und ist A^{-1} bekannt, so ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ sofort lösbar:

$$Ax = b \Leftrightarrow (A^{-1}A)x = A^{-1}b \Leftrightarrow I_n x = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b.$$

Beispiel 7.4.2:

$$\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 = 4 \\ -x_1 + x_2 = -2 \end{array} \Leftrightarrow Ax = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ mit } A \text{ aus Beispiel 7.3.12 b) von oben.}$$

Also ist

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ die Lösung.}$$

Auf die Berechnung von A^{-1} gehen wir später ein. Sie muss allerdings in der Praxis nur selten durchgeführt werden (s.u.).

Zu gegebenem A und b sind alle Lösungsvektoren $x \in \mathbb{R}^n$ gesucht. Im Fall $b \neq 0$ heißt das LGS $Ax = b$ *inhomogen*, sonst *homogen*. Zu dem LGS $Ax = b$ heißt $Ax = 0$ das zugeordnete homogene System. Schließlich heißt

$$(A|b) := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

die *erweiterte Koeffizientenmatrix*.

Wann ist $Ax = b$ zu gegebenem A und b lösbar?

Satz 7.4.3. Sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann sind äquivalent

- (i) $Ax = b$ ist lösbar
- (ii) $b \in \text{Im } A$
- (iii) $\boxed{\text{rg } A = \text{rg}(A|b)}$

Gilt $\text{rg } A = m$, so ist $Ax = b$ für beliebiges $b \in \mathbb{R}^m$ lösbar.

Beispiel 7.4.4:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hier ist $\text{rg } A = 1$ und $\text{rg}(A|b) = 2$, also ist $Ax = b$ nicht lösbar.

$$(b) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,3}$$

hat $\text{rg } A = 2 (= m)$, also ist $Ax = b$ für jedes $b \in \mathbb{R}^2$ lösbar.

Wie bekommt man alle Lösungen von $Ax = b$?

Satz 7.4.5. Sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ und x_s eine spezielle Lösung von $Ax = b$. Dann ist die Lösungsmenge (=Menge aller Lösungen) von $Ax = b$ gleich

$$x_s + \ker A = \{x_s + x : x \in \ker A\}.$$

Beispiel 7.4.6: Alle Lösungen von $Ax = b$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Schritt:

Bestimme eine spezielle Lösung x_s von $Ax = b$, hier z.B. $x_s = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Schritt:

Bestimme $\ker A$, d.h. *alle* Lösungen von $Ax = 0$.

Hier:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 = 0 & \Rightarrow x_1 = -2x_3 \\ x_2 + x_3 = 0 & \Rightarrow x_2 = -x_3 \end{aligned}$$

Also

$$\ker A = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 = -2x_3 \text{ und } x_2 = -x_3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Lösungsmenge $\ker A$ hat einen Parameter (etwa x_3). Dies ist schon zuvor klar nach Satz 7.3.21, denn $\dim(\ker A) = n - \text{rg } A = 3 - 2 = 1$. Die Bezeichnung des Parameters als x_3 ist nicht gut. Besser ist z.B.

$$\ker A = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Schritt:

Bilde $x_s + \ker A$. Hier: Lösungsmenge von $Ax = b$ ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wie berechnet man den Rang von A , eine spezielle Lösung von $Ax = b$ und schließlich alle Lösungen von $Ax = b$ systematisch?

Das Gauß-Verfahren

Das *Eliminationsverfahren von Gauß*, auch kurz *Gauß-Verfahren* oder *Gauß-Algorithmus* genannt, ist ein effizientes Mittel zur händischen und numerischen Lösung von linearen Gleichungssystemen.

Es basiert auf den folgenden sogenannten *elementaren Umformungen*, die die Lösungsmenge des LGS nicht ändern:

- (a) Vertauschen zweier Gleichungen,
- (b) Multiplizieren einer Gleichung mit $\lambda \neq 0$,
- (c) Addition des λ -fachen der i -ten Gleichung zur j -ten Gleichung, wobei $i \neq j$ ist.

Zur Vereinfachung der Notation verwendet man dazu nur die notwendigen Informationen aus der Matrixform des LGS. Wir behandeln ein exemplarisches Beispiel, in dem wir die Rechnung mit allen Variablen der Darstellung im Gauß-Algorithmus gegenüberstellen.

Beispiel 7.4.7: Gesucht sind alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Matrixform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Für das Gauß-Verfahren speckt man die Notation noch weiter ab und schreibt formal

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 1 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot 1 \\ \leftarrow \quad | \\ | \quad \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

Wir ziehen nun die erste Gleichung jeweils 2 mal von der zweiten und vierten Gleichung ab und addieren sie zur dritten Gleichung hinzu. Im Gauß-Verfahren wird das wie in der obigen Formel angedeutet. Das liefert

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ -3x_3 - x_4 &= -9 \\ 3x_3 &= 6 \\ -5x_2 - 4x_3 - x_4 &= -6 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -5 & -4 & -1 & -6 \end{array} \right) : 3$$

Im nächsten Schritt wird die dritte Gleichung durch drei geteilt.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ -3x_3 - x_4 &= -9 \\ x_3 &= 2 \\ -5x_2 - 4x_3 - x_4 &= -6 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -1 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \\ | \quad \uparrow \\ \cdot(-1) \quad \cdot 3 \quad \cdot 4 \\ \leftarrow \end{array}$$

Nun kann man das Ergebnis $x_3 = 2$ aus der dritten Gleichung in die anderen Gleichungen einsetzen. Das geschieht formal dadurch, dass man die dritte Gleichung von der ersten abzieht, zur zweiten drei Mal addiert und zur vierten vier Mal. Wir erhalten

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_4 & = & 3 \\ -x_4 & = & -3 \\ x_3 & = & 2 \\ -5x_2 - x_4 & = & 2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \\ \cdot 1 \quad \cdot (-1) \\ | \\ \leftarrow \end{array}$$

Einsetzen der zweiten Gleichung in gleicher Weise liefert nun

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 0 \\ -x_4 & = & -3 \\ x_3 & = & 2 \\ -5x_2 & = & 5 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \cdot (-1) \\ \\ : (-5) \end{array}$$

Wir teilen noch die letzte Gleichung durch 5 und die zweite durch -1 .

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_4 & = & 3 \\ x_3 & = & 2 \\ x_2 & = & -1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \\ | \\ | \\ \cdot (-1) \end{array}$$

und setzen ein letztes Mal ein:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 \\ x_4 & = & 3 \\ x_3 & = & 2 \\ x_2 & = & -1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Die Lösung ist also $x = (1, -1, 2, 3)^\top$.

Beispiel 7.4.8: In diesem Beispiel wollen wir den Gauß-Algorithmus einmal auf ein sogenanntes unterbestimmtes Gleichungssystem anwenden, d.h. wir haben weniger Gleichungen als Unbekannte. Für eine beliebige Zahl $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir dazu das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gauß-Verfahren bekommen wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & | & a \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 1 \quad \cdot (-1) \\ \leftarrow \quad | \\ \leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & | & a-1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot (-1) \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & a-2 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Gleichung lautet nun $0 = a - 2$. Damit ist das LGS unlösbar, wann immer $a \neq 2$ gilt.

Wir betrachten also ab jetzt den Fall $a = 2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Der Rang der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist zwei und die Spaltenanzahl ist vier. Also gilt nach der Dimensionsformel $\dim(\ker A) = 2$. Weiter ist nach Satz 7.4.5 die Menge aller Lösungen gegeben durch $x_s + \ker A = \{x_s + \lambda b_1 + \mu b_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, wobei x_s eine spezielle Lösung des LGS und $\{b_1, b_2\}$ eine Basis von $\ker A$ ist. Setzen wir in den verbliebenen Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_4 &= 2 \\ 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$\lambda := x_2$ und $\mu := x_4$, dann gilt

$$x_1 = 2 - 3\lambda - 5\mu \quad \text{und} \quad x_3 = -1 + 2\lambda + 3\mu.$$

Also ist x eine Lösung obigen LGS für $a = 2$, genau dann wenn

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3\lambda - 5\mu \\ \lambda \\ -1 + 2\lambda + 3\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 7.4.9: Der Gauß-Algorithmus erlaubt auch das simultane Lösen eines Gleichungssystems für verschiedene rechte Seiten. Als Beispiel hierzu betrachten wir $Ax = b_1$ und $Ax = b_2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gauß-Verfahren:

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Als Lösungen erhalten wir also zu b_1 den Vektor $x_1 = (2, -1)^\top$ und zu b_2 den Vektor $x_2 = (-1, 1)^\top$.

Bemerkung 7.4.10. Der Gauß-Algorithmus dient auch zur Bestimmung der Inversen einer Matrix. Sei dazu $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ regulär. Dann gilt für die Inverse $AA^{-1} = I_n$, d.h. die j -te Spalte x_j von A^{-1} erfüllt das LGS $Ax_j = e_j$, wobei e_j der j -te Einheitsvektor ist. Es ist damit zur Berechnung der Inversen ein LGS mit n verschiedenen rechten Seiten zu lösen, genau wie im letzten Beispiel.

Beispiel 7.4.11: Gesucht ist die Inverse von $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Lösen wir die drei LGSs $Ax_1 = e_1$, $Ax_2 = e_2$, $Ax_3 = e_3$, so ist nach obiger Bemerkung die Inverse durch die Matrix $A^{-1} = (x_1, x_2, x_3)$ gegeben. Also berechnen wir mit dem Gauß-Verfahren

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ | \\ \leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \\ \cdot 1 \quad \cdot(-1) \\ \leftarrow \end{array} \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \\ \uparrow \\ \cdot(-2) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Also ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

7.5 Geometrie in der Ebene

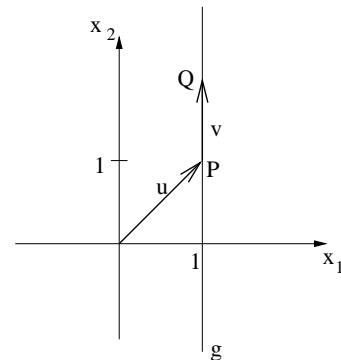
Die Sprache der Vektorrechnung ist ein starkes Hilfsmittel zur Behandlung elementargeometrischer Fragen. Wir wollen dieses noch kurz im zweidimensionalen und im nächsten Abschnitt im dreidimensionalen Fall beleuchten.

Wir beginnen mit dem schon früher kurz angeklungenen Begriff der Gerade.

Definition 7.5.1. Seien $u, v \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq 0$. Dann heißt $g := \{u + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine *Gerade*. Der Vektor u wird *Aufpunkt* und v *Richtungsvektor* der Gerade genannt.

Diese Form der Darstellung der Geraden heißt *Parameterdarstellung*.

Bemerkung 7.5.2. Oft wird eine Gerade durch 2 Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^2$ gegeben (Zwei-Punkte-Form). Dann kann man $u = \overrightarrow{OP}$ und $v = \overrightarrow{PQ}$ in der Parameterdarstellung nehmen.



Bemerkungen 7.5.3:

- (i) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und a und b seien nicht beide Null. Dann ist die Lösungsmenge der Gleichung $ax_1 + bx_2 = c$ immer eine Gerade (vgl. Satz 7.4.5). Eine solche Gleichung heißt darum auch *Geradengleichung*.
- (ii) Umgekehrt lässt sich auch jede Gerade als Lösungsmenge einer solchen Gleichung auffassen. Um das einzusehen sei g eine Gerade mit Aufpunkt u und Richtungsvektor v . Dann ist $x = (x_1, x_2)^T \in g$, genau dann wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $u + \lambda v = x$, d.h. es muss $u_1 + \lambda v_1 = x_1$ und $u_2 + \lambda v_2 = x_2$ gelten.

Da $v \neq 0$ ist, muss $v_1 \neq 0$ oder $v_2 \neq 0$ gelten. Wir beschränken uns auf den Fall $v_1 \neq 0$, der andere geht analog. Dann können wir die erste Gleichung nach λ auflösen und erhalten $\lambda = (x_1 - u_1)/v_1$. Also gilt

$$\begin{aligned} x \in g & \iff u_2 + \frac{x_1 - u_1}{v_1} v_2 = x_2 \iff v_1 u_2 + x_1 v_2 - u_1 v_2 = x_2 v_1 \\ & \iff v_2 x_1 - v_1 x_2 = u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{aligned}$$

und das ist eine Gleichung wie in (i) mit $a = v_2$, $b = -v_1$ und $c = u_1 v_2 - v_1 u_2$.

Ein und dieselbe Gerade hat viele verschiedene Darstellungen als Gleichung, so haben z.B. die beiden Geradengleichungen $x_1 - x_2 = 1$ und $2x_1 - 2x_2 = 2$ offensichtlich die selben Lösungen. Unter diesen verschiedenen Darstellungen einer Geraden als Gleichung wollen wir eine besonders praktische gesondert erwähnen.

Seien dazu $u \in \mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $g = \{u + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Da $v \neq 0$ ist, gibt es einen Vektor $n \in \mathbb{R}^2$, der orthogonal zu v ist und $\|n\| = 1$ erfüllt. Dies ist ein *Normaleneinheitsvektor* von g . Mit diesem gilt nun

$$g = \{x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 : \langle n, x \rangle = \langle n, u \rangle\},$$

d.h. g ist durch die Gleichung $n_1x_1 + n_2x_2 = n_1u_1 + n_2u_2$ gegeben. Diese Geradengleichung heißt *Hesse-Normalform* (HNF) von g .

Beispiel 7.5.4: Sei $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Hier ist also $v = (-1, 1)^\top$ und ein dazu senkrechter Vektor ist z.B. $(1, 1)^\top$, wir nehmen also als Normaleneinheitsvektor

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten als Hesse-Normalform von g

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 = \sqrt{2}.$$

Ein Grund für die Wichtigkeit der Hesse-Normalform ist, dass damit Abstandsbestimmungen einfach sind, denn es gilt der folgende Satz.

Satz 7.5.5. Sei $g \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade mit HNF $ax_1 + bx_2 = c$ und sei $w \in \mathbb{R}^2$. Dann ist der Abstand von w zu g gegeben durch $|aw_1 + bw_2 - c|$. Insbesondere ist $|c|$ der Abstand von g zum Ursprung.

Für die Gerade aus Beispiel 7.5.4 bekommen wir also sofort $\sqrt{2}$ für den Abstand zum Ursprung.

Beispiel 7.5.6: Gegeben sind zwei Geraden

$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad g_2 = \left\{ \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

und gesucht ist deren Schnittpunkt, sowie der Schnittwinkel zwischen den beiden Geraden.

Schnittpunkt: Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ ist der Schnittpunkt der beiden Geraden, wenn $x \in g_1 \cap g_2$ liegt, wenn es also reelle Zahlen λ und μ gibt mit

$$x = \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h. mit} \quad \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses LGS lässt sich leicht lösen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 2 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -1 \\ \leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{array} \right).$$

Damit ist $\mu = -2$, d.h. wir bekommen $x = -2 \cdot (-2, 1)^\top = (4, -2)^\top$ als Schnittpunkt.

Schnittwinkel: Der Schnittwinkel der beiden Geraden ist gerade der Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren v_1 und v_2 . Nach Bemerkung 7.1.4 iii) gilt für diesen Winkel φ die Beziehung $\langle v_1, v_2 \rangle = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \cos(\varphi)$, also ist

$$\cos(\varphi) = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}.$$

Das ergibt mit dem Arcuscosinus $\varphi \approx 0,6061 \approx 0,1929\pi \approx 34,729^\circ$.

7.6 Geometrie im Raum

Wir wenden uns nun dem Raum \mathbb{R}^3 zu. Die Definition einer Gerade bleibt hier unverändert die selbe wie in \mathbb{R}^2 , hinzu kommt als flaches geometrisches Gebilde die Ebene.

Definition 7.6.1. Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ und v und w seien linear unabhängig. Dann ist die Parameterdarstellung der Ebene mit Aufpunkt u und Richtungsvektoren v und w gegeben durch

$$E := \{u + \lambda v + \mu w : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Bemerkung 7.6.2. Eine Ebene wird eindeutig festgelegt durch die Angabe von drei Punkten $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$, die nicht auf einer Geraden liegen, d.h. für die die Vektoren \overrightarrow{PQ} und \overrightarrow{PR} linear unabhängig sind. Dann bekommt man eine Parameterdarstellung z.B. mit der Wahl $u = \overrightarrow{OP}$, $v = \overrightarrow{PQ}$ und $w = \overrightarrow{PR}$.

Auch in \mathbb{R}^3 gibt es einen direkten Zusammenhang zwischen Geraden, bzw. Ebenen und den Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen. Ist $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^3$, so ist die Lösungsmenge von $Ax = b$ genau dann eine Gerade, wenn $\text{rg } A = 2$ und $b \in \text{Im}(A)$ ist. Umgekehrt gibt es auch zu jeder Geraden wieder ein solches Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten.

Eine Ebene erhält man als Lösung von $Ax = b$, falls $\text{rg}(A) = 1$ ist und $b \in \text{Im}(A)$ liegt und auch hier gibt es zu jeder Ebene wieder eine Gleichung, als deren Lösungsmenge sie auftritt, eine Ebenengleichung.

Wir betrachten zunächst ein Beispiel für eine Gerade.

Beispiel 7.6.3: Es sei

$$g := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Elemente $x \in g$ erfüllen jeweils für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ die Gleichungen $x_1 = 1 + \lambda$, $x_2 = \lambda$ und $x_3 = 1 - \lambda$. Setzt man in der ersten und dritten Gleichung die zweite ein, erhält man das LGS

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$$

dessen Lösungsmenge genau g ist.

Im \mathbb{R}^3 kann es keine Hesse-Normalform für Geraden geben, denn es gibt ja nun unendlich viele verschiedene Richtungen, die senkrecht zu einer gegebenen Gerade stehen. Dafür klappt es hier bei Ebenen, denn diese haben eine ausgezeichnete orthogonale Richtung.

Sei also $E \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Ebene mit Aufpunkt u und linear unabhängigen Richtungsvektoren v und w . Dann gibt es einen Vektor $n \in \mathbb{R}^3$, der senkrecht auf v und auf w steht und $\|n\| = 1$ erfüllt. Dieser ist bis auf ein Vorzeichen eindeutig und heißt *Normaleneinheitsvektor* von E . Es gilt dann

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle n, x \rangle = \langle n, u \rangle\},$$

d.h. E ist die Lösungsmenge der Gleichung $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = n_1u_1 + n_2u_2 + n_3u_3$. Diese Ebenengleichung heißt *Hesse-Normalform* (HNF) von E .

Beispiel 7.6.4: Wir bestimmen die HNF von

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Hier ist also $v = (0, 1, 0)^\top$ und $w = (1, 1, 1)^\top$. Ein zu diesen beiden Vektoren senkrechter Vektor ist offensichtlich $(1, 0, -1)^\top$, wir wählen also

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(Dieses Rateverfahren stößt natürlich bei komplizierteren Vektoren an seine Grenzen, eine rechnerische Methode den Normaleneinheitsvektor zu finden werden wir in Kürze kennenlernen.) Wegen $\langle n, x \rangle = 1/\sqrt{2}x_1 - 1/\sqrt{2}x_3$ und $\langle n, u \rangle = 1/\sqrt{2}$ ist damit die HNF von E

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Auch hier gilt der Satz, dass wir Abstände direkt mit der HNF ausrechnen können:

Satz 7.6.5. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Ebene mit HNF $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ und $w \in \mathbb{R}^3$. Dann ist der Abstand von w zu E gegeben durch $|aw_1 + bw_2 + cw_3 - d|$. Insbesondere ist der Abstand von E zum Ursprung gleich $|d|$

Beispiel 7.6.6: Wir bestimmen den Schnittpunkt von g aus Beispiel 7.6.3 und der Ebene aus Beispiel 7.6.4. Wir hatten dort jeweils gesehen, dass

$$x \in g \iff \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad x \in E \iff x_1 - x_3 = 1.$$

Der Schnittpunkt muss also alle drei Gleichungen gleichzeitig erfüllen. Das führt uns auf das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \leftarrow \quad \uparrow \\ \cdot 1 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \\ \cdot (-1/2) \\ \leftarrow \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 \end{array} \right)$$

Also ist $x = (3/2, 1/2, 1/2)^\top$ der Schnittpunkt von g und E .

Definition 7.6.7. Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$, sowie $y = (y_1, y_2, y_3)^\top$. Dann heißt

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2y_3 - y_2x_3 \\ y_1x_3 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix}$$

Kreuzprodukt oder *Vektorprodukt* oder *äußeres Produkt* von x und y .

Beispiel 7.6.8:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot (-2) - 3 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 - 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 3 - 0 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bemerkungen 7.6.9:

- (i) Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn $x \times y = 0$ gilt.
- (ii) Sind $x, y \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig und ist α der Winkel zwischen x und y (dieser ist dann weder Null noch π), so ist $x \times y$ der eindeutig bestimmte Vektor mit
- $x \times y$ steht sowohl auf x als auch auf y senkrecht
 - $\|x \times y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \sin(\alpha)$
 - x, y und $x \times y$ bilden ein Rechtssystem.
- (iii) Sind $v, w \in \mathbb{R}^3$ Richtungsvektoren einer Ebene E , so ist $\frac{v \times w}{\|v \times w\|}$ ein Normaleneinheitsvektor von E .

Rechenregeln: Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

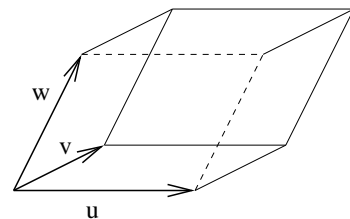
- (a) $u \times v = -v \times u$ (Anti-Kommutativität)
- (b) $\lambda \cdot (u \times v) = (\lambda u) \times v = u \times (\lambda v)$ (Assoziativität)
- (c) $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$ (Distributivität)
- (d) $u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$.

Das Kreuzprodukt hat noch eine weitere anschauliche Anwendung.

Definition 7.6.10. Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Die Zahl $\langle u, v \times w \rangle$ heißt *Spatprodukt* von u, v und w .

Bemerkungen 7.6.11:

- (i) Der Betrag des Spatproduktes entspricht genau dem Volumen des von den Vektoren u, v und w aufgespannten *Parallelotops*. Dabei ist das Vorzeichen positiv, wenn die Vektoren u, v, w ein Rechtssystem und negativ, wenn sie ein Linkssystem bilden.

**(ii) Rechenregeln:**

- $\langle u, v \times w \rangle = \langle w, u \times v \rangle = \langle v, w \times u \rangle$
- $\langle u + v, v \times w \rangle = \langle u, (v + u) \times w \rangle = \langle u, v \times (u + w) \rangle = \langle u, v \times w \rangle$

- (iii) Das Spatprodukt von $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ ist genau dann Null, wenn diese in einer Ebene liegen.

Beispiel 7.6.12: Das Spatprodukt der drei Standardbasisvektoren ist

$$\langle e_1, e_2 \times e_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1,$$

in Übereinstimmung damit, dass das Volumen eines Würfels mit Seitenlänge Eins Eins ist.

Index

- Abbildung, lineare, 96
- Abbildungsmatrix, 97
- abgeschlossenes Intervall, 10
- Ableitung, 56
 - einseitige, 57
 - n -te, 64
 - zweite, 64
- absolut konvergente
 - Reihe, 47
 - uneigentliche Integrale, 86
- Absolutbetrag, 10
- abzählbar, 4
- Addition
 - in \mathbb{R}^n , 91
 - von Matrizen, 98
- Additionstheoreme, 33
- Äquivalenz, 2
- algebraische Gleichung, 19
- Allquantor, 6
- alternierende harmonische Reihe, 46
- alternierende Reihe, 46
- Anordnung der reellen Zahlen, 8
- Arcuscosinus, 36
- Arcussinus, 36
- Arcustangens, 36
- Areacosinushyperbolicus, 26
- Argument, 33
 - einer Funktion, 24
- Aufpunkt, 108, 110
- Aussage, 1
- Aussageform, 2
- äußeres Produkt, 111

- Basis, 95
- Bernoulli'sche Ungleichung, 9
- beschränkte
 - Folge, 41
 - Funktion, 27
- bestimmt divergente Folge, 41
- bestimmtes Integral, 74
- Betrag
 - einer komplexen Zahl, 31
 - einer reellen Zahl, 10
 - eines Vektors, 92
- Beweis
 - direkter, 4
 - durch Widerspruch, 5
 - indirekter, 5
- bijektiv, 25
- Bild einer Matrix, 101
- Bildmenge, 24
- Binomialkoeffizient, 7
- Binomische Formeln, 7

- Cauchy-Folge, 44
- Cauchy-Produkt, 46
- Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung, 93
- Cosinus, 32
- Cosinus hyperbolicus, 25
- Cosinussatz, 34
- Cotangens, 35

- Defekt, 102
- Definitionsbereich, 24
 - maximaler, 24
- dekadischer Logarithmus, 15
- Differentialquotient, 57
- Differenz von Mengen, 3
- Differenzenquotient, 57
- Differenzierbarkeit, 56
 - mehrfache, 64
- Dimension, 96
- Dimensionsregel, 102
- direkter Beweis, 4
- disjunkt, 3
- Disjunktion, 1
- Diskriminante, 20
- divergente
 - Folge, 40
 - Reihe, 44
 - uneigentliche Integrale, 86
- Dodekaeder, 37
- Drehung, 96
- Dreiecksungleichung, 10, 31, 93
- Durchschnitt, 3

- e, 17
- Ebene, 110
 - Drei-Punkte-Form, 110
 - Parameterdarstellung, 110
- Ebenengleichung, 110
 - Hesse-Normalform, 111
- Einheitsmatrix, 100
- Einheitsvektor, 93
- einseitige Ableitung, 57
- Element, 2
- Elementarumformungen, 105
- Entwicklungsstelle, 48
- ε -Umgebung, 40
- erweiterte Koeffizientenmatrix, 103
- Euklidnorm, 92
- Euler'sche Zahl, 17
- Euler'sches Theorem, 34
- Existenzquantor, 6
- Exponentialreihe, 50
- exponentielle Standardform, 13
- Extremum
 - globales, 65
 - lokales, 65
 - strenges lokales, 65
- Fakultät, 7
- Feinheit einer Zerlegung, 73
- Fibonacci-Zahlen, 39
- Flächeninhalt, 75
- Folge, 39
 - beschränkte, 41
 - bestimmt divergente, 41
 - Cauchy-, 44
 - der Partialsummen, 44
 - divergente, 40
 - konvergente, 40
 - monoton fallende, 40
 - monoton wachsende, 40
 - monotone, 40
 - Null-, 40
 - rekursiv definierte, 40
 - streng monoton fallende, 40
 - streng monoton wachsende, 40
 - streng monotone, 40
- Folglied, 39
- Folgenindex, 39
- Formel von Hadamard, 49
- Funktion, 23
 - Ableitung einer, 56
 - beschränkte, 27
 - bijektive, 25
 - differenzierbare, 56
 - gerade, 27
 - hyperbolische, 25
 - injektive, 25
 - integrierbare, 74
 - monoton fallende, 27
 - monoton wachsende, 27
 - monotone, 27
 - n -mal differenzierbare, 64
 - periodische, 27
 - sgraph, 24
 - stetige, 52
 - streng monoton fallende, 27
 - streng monoton wachsende, 27
 - streng monotone, 27
 - surjektive, 25
 - swert, 24
 - Umkehr-, 25
 - ungerade, 27
 - zweimal differenzierbare, 64
- ganze Zahlen, 3
- Gaußklammerfunktion, 41
- Gauß'sche Zahlenebene, 31
- geometrische Reihe, 44
- Gerade, 91, 108
 - in Parameterdarstellung, 108
 - Zwei-Punkte-Form, 91, 108
- gerade Funktion, 27
- Geradengleichung, 108
 - Hesse-Normalform, 109
- Gleichung
 - algebraische, 19
- globales Extremum, 65
- Grad eines Polynoms, 19
- Graph, 24
 - der Umkehrfunktion, 26
- Grenzwert, 40
 - linksseitiger, 52
 - rechtsseitiger, 52
 - von Funktionen, 52
- Grenzwertsätze, 42
- Grenzwertsätze
 - für Funktionen, 52
- Hadamard-Formel, 49
- Häufungspunkt einer Folge, 40
- halboffenes Intervall, 10
- harmonische Reihe, 45
- Hauptsatz der Algebra, 31

- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 76
Heron-Verfahren, 40
Hesse-Normalform, 109, 111
hinreichend, 2
höhere Ableitungen, 64
homogenes lineares Gleichungssystem, 103
Hôpital, Regel von de L', 64
Hyperbolische Funktionen, 25
- i*, 30
Ikosaeder, 37
imaginäre Einheit, 30
Imaginärteil, 30
Implikation, 1
Index einer Folge, 39
indirekter Beweis, 5
Induktionsanfang, 6
Induktionsschritt, 6
inhomogenes lineares Gleichungssystem, 103
injektiv, 25
inneres Produkt, 92
Integral
 bestimmtes, 74
 unbestimmtes, 77
 uneigentliches, 85, 87
integrierbare Funktion, 74
Interpolationspolynom, 88
Intervall, 10
 abgeschlossenes, 10
 halboffenes, 10
 offenes, 10
Intervalllänge, 10
inverse Matrix, 100
invertierbare Matrix, 100
irrationale Zahlen, 4
Iterationsverfahren, Newton'sches, 66
- Kartesisches Produkt, 3
Kern einer Matrix, 101
Kettenregel, 59
komplexe Zahlen, 30
Konjugation, 31
konjugiert komplexe Zahl, 31
Konjunktion, 1
Kontrapositionsgesetz, 2
konvergente
 Folge, 40
 Reihe, 44
 uneigentliche Integrale, 86
Konvergenzradius, 49
- Koordinaten, 91, 92
Kreuzprodukt, 111
Kroneckersymbol, 100
Kurvendiskussion, 66
- Lagrange-Restglied, 69
leere Menge, 3
Leibniz-Kriterium, 46
Limes, 40
linear unabhängig, 93
lineare Abbildung, 96
lineares Gleichungssystem, 103
 homogenes, 103
 inhomogenes, 103
Linearkombination, 95
linksseitiger Grenzwert, 52
Lösungsmenge, 9
Logarithmus
 dekadischer, 15
 natürlicher, 18
lokales Extremum, 65
- Majorantenkriterium
 für Reihen, 47
 für uneigentliche Integrale, 87
Mantisse, 13
Matrix, 97
 Abbildungs-, 97
 inverse, 100
 invertierbare, 100
 quadratische, 97
 reguläre, 100
 transponierte, 101
Matrizenprodukt, 98
maximaler Definitionsbereich, 24
Maximum
 globales, 65
 lokales, 65
 strenges lokales, 65
Menge, 2
 leere, 3
Mengendifferenz, 3
Minimum
 globales, 65
 lokales, 65
 strenges lokales, 65
Minorantenkriterium
 für Reihen, 48
 für uneigentliche Integrale, 87
Mittelwertsatz, 62
 der Integralrechnung, 76

- monoton fallende
 - Folge, 40
 - Funktion, 27
- monoton wachsende
 - Folge, 40
 - Funktion, 27
- monotone
 - Folge, 40
 - Funktion, 27
- Multiplikation mit Skalaren
 - in \mathbb{R}^n , 91
 - von Matrizen, 98
- natürliche Zahlen, 3
- natürlicher Logarithmus, 18
- Negation, 1
- Newton-Cotes-Formeln, 88
- Newton-Verfahren, 66
- Norm, 92
- Normaleneinheitsvektor
 - einer Ebene, 111
 - einer Geraden, 109
- normalisierte Gleitpunktdarstellung, 13
- normierter Vektor, 93
- notwendig, 2
- n -te Wurzel, 9
- Nullfolge, 40
- Nullstelle, 20
- Nullvektor, 92
- numerische Integration, 88
- Obermenge, 3
- offenes Intervall, 10
- Oktaeder, 37
- orthogonale Vektoren, 93
- Ortsvektor, 92
- Parallelotop, 112
- Parameterdarstellung einer Ebene, 110
- Partialbruchzerlegung, 81
- Partialsomme, 44
- partielle Integration, 77
- Pascal'sches Dreieck, 8
- periodische Funktion, 27
- Platonische Körper, 36
- Polarkoordinaten, 33
- Polynom, 19
 - grad, 19
 - interpolierendes, 88
- Potenzreihe, 48
- p - q -Formel, 20
- Produktregel, 59
- Produktzeichen, 7
- Projektion, 96
- Proportionalität, 27
 - umgekehrte, 28
- Proportionalitätskonstante, 28
- Pythagoras
 - trigonometrischer, 33
- quadratische Ergänzung, 20
- quadratische Matrix, 97
- Quadratur, 88
- Quotientenkriterium, 47, 48
- Quotientenregel, 59
- Rang, 102
- rationale Zahlen, 3
- Realteil, 30
- rechtsseitiger Grenzwert, 52
- reelle Zahlen, 4
- Regel von de L'Hôpital, 64
- reguläre Matrix, 100
- Reihe, 44
 - absolut konvergente, 47
 - alternierende, 46
 - alternierende harmonische, 46
 - divergente, 44
 - Exponential-, 50
 - geometrische, 44
 - harmonische, 45
 - konvergente, 44
 - nwert, 44
 - Potenz-, 48
- rekursiv definierte Folge, 40
- Restglied von Lagrange, 69
- Richtungsvektor
 - einer Ebene, 110
 - einer Gerade, 108
- Riemannsumme, 73
- \mathbb{R}^n , 91
- Rolle, Satz von, 62
- Satz
 - von Rolle, 62
 - von Taylor, 68
- Signum, 10
- Simpsonregel, 89
- Sinus, 32
- Sinus hyperbolicus, 25
- Sinussatz, 34
- Skalar, 91

- Skalarprodukt, 92
- Spatprodukt, 112
- Spiegelung, 96
- Stammfunktion, 77
- Standardbasis, 95
- stetig ergänzbar, 53
- Stetigkeit, 52
- Strecke, 92
- streng monoton fallende
 - Folge, 40
 - Funktion, 27
- streng monoton wachsende
 - Folge, 40
 - Funktion, 27
- streng monoton
 - Folge, 40
 - Funktion, 27
- strenges lokales Extremum, 65
- Substitutionsregel, 78
- Summenzeichen, 6
- surjektiv, 25

- Tangens, 35
- Taylor, Satz von, 68
- Taylorpolynom, 69
- Taylorreihe, 69
- Teilmenge, 3
- Teilraum, 94
- Tetraeder, 37
- Tetraederwinkel, 36
- Transitivität, 8
- transponierte Matrix, 101
- Trapezregel, 89
- trigonometrischer Pythagoras, 33

- überabzählbar, 4
- umgekehrte Proportionalität, 28
- Umkehrfunktion, 25
 - Ableitung der, 60
- unbestimmtes Integral, 77
- uneigentliches Integral, 85, 87
 - absolut konvergentes, 86
 - divergentes, 86
 - konvergentes, 86
- ungerade Funktion, 27
- Ungleichung, 8
 - Bernoulli'sche, 9
 - Dreiecks-, 10, 31
- Unterraum, 94

- Vektor, 92
 - Addition, 91
 - Multiplikation mit Skalar, 91
 - normierter, 93
- Vektorprodukt, 111
- Vereinigung, 3
- Verkettung, 52
- vollständige Induktion, 5

- Würfel, 37
- Wahrheitstafel, 2
- Wendepunkt, 65
- Wertebereich, 24
- Widerspruchsbeweis, 5
- Wurzel, 9
 - n -te, 9
- Wurzelkriterium, 47, 48

- Zahlen
 - ganze, 3
 - irrationale, 4
 - komplexe, 30
 - natürliche, 3
 - rationale, 3
 - reelle, 4
- Zahlengerade, 3
- Zerlegung, 73
 - Feinheit einer, 73
- Zuordnungsvorschrift, 23
- Zwei-Punkte-Form einer Geraden, 91, 108
- zweite Ableitung, 64
- Zwischenwertsatz, 53