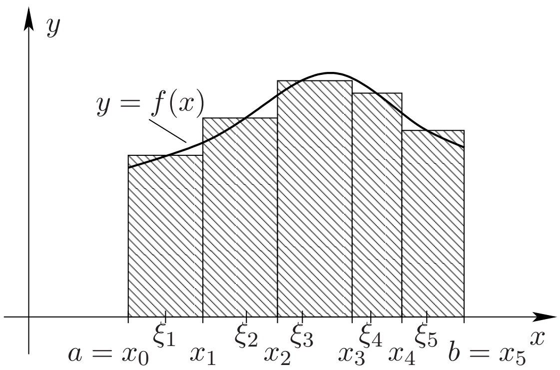
Kapitel 6

Integration

6.1 Das bestimmte Integral

Historischer Ausgangspunkt waren Probleme der Flächenberechnung.
Grundaufgabe: Berechne die Fläche zwischen einer Kurve $y = f(x)$ und der x-Achse im Bereich $a \leq x \leq b$ (hierbei sei zunächst $f(x) \geq 0$).



Idee: Approximiere die Fläche folgendermaßen durch Rechtecke:

- Zerlege $[a, b]$ in n Teilintervalle: $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b$. Dann heißt
$$Z = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
Zerlegung von $[a, b]$.
- Wähle aus jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ eine Zwischenstelle $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
- Verwende als Näherung für den Flächeninhalt über der Grundfläche $[x_{i-1}, x_i]$ die Rechteckfläche $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

Dies liefert als Näherung für die Gesamtfläche die *Zerlegungssumme* (Riemannsumme)

$$\boxed{S(Z, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).}$$

Man betrachtet nun immer feinere Zerlegungen, um als Grenzwert den exakten Flächeninhalt zu bekommen. Dabei versteht man unter der *Feinheit* $l(Z)$ einer Zerlegung Z die Länge des größten Teilintervalls, d.h. $l(Z) = \max\limits_{i=1,\ldots,n}(x_i - x_{i-1})$.

def:best_int

Definition 6.1.1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißt f über $[a, b]$ *integrierbar*, wenn für jede Folge von Zerlegungen Z_n von $[a, b]$ mit $l(Z_n) \to 0$ und beliebiger Wahl von Zwischenstellen ξ_i^n, die Folge der Zerlegungssummen $S(Z_n, \xi^n)$ stets konvergent ist und immer denselben Grenzwert besitzt. Dieser Grenzwert heißt das *bestimmte Integral von* f *über* $[a, b]$, und wird mit

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

bezeichnet.

Der folgende Satz gibt eine wichtige hinreichende Bedingung für die Integrierbarkeit.

::intbarkeit

Satz 6.1.2. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f über $[a, b]$ integrierbar.

Bemerkungen 6.1.3:

(i) Wenn f auf $[a, b]$ integrierbar ist, kann man zur Berechnung von $\int_a^b f(x)\, dx$ möglichst günstige Zerlegungen und Zwischenstellen verwenden.

(ii) Die Bezeichnung der Integrationsvariablen ist willkürlich! Zum Beispiel ist

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Beispiele 6.1.4:

(a) $\int_0^b x^2\, dx$. Es ist $f(x) = x^2$ stetig, also nach Satz 6.1.2 integrierbar.

Verwende hier *äquidistante* Zerlegungen: $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ mit $x_i = i\,\frac{b}{n}$.
Zwischenstellen: $\xi_i = x_i$. Dann erhält man

$$S_n (= S(Z_n, \xi^n)) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \left(i\,\frac{b}{n}\right)^2 \frac{b}{n} = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \sum_{i=1}^n i^2.$$

Es ist $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1)$ (Beweis mit vollständiger Induktion), und damit

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\, b^3\, \frac{n(n+1)(2n+1)}{n \cdot n \cdot n} = \frac{1}{3}\, b^3.$$

Fazit: $\int_0^b x^2\, dx = \frac{1}{3}\, b^3$.

(b) $\int_1^b \frac{dx}{x}$ für $b > 1$. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist für $x > 0$ stetig, also integrierbar.

Zerlege $[1, b]$ durch $x_i = b^{i/n}$ $(i = 0, \ldots, n)$ und wähle $\xi_i = x_{i-1}$. Dann erhält man

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n b^{-\frac{i-1}{n}} \left(b^{\frac{i}{n}} - b^{\frac{i-1}{n}}\right) = \sum_{i=1}^n (b^{\frac{1}{n}} - 1),$$

also $S_n = n\,(b^{\frac{1}{n}} - 1)$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} n\,(b^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{b^{\frac{1}{n}} - 1}{1/n} = \lim_{x\to 0+} \frac{b^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{x \ln b} - 1}{x} = \ln b,$$

wobei im letzten Schritt die Regel von de L'Hôpital verwendet wurde.

Fazit: $\displaystyle\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln b.$

6.2 Eigenschaften des bestimmten Integrals

6.2.1 Rechenregeln

`::int_regeln` **Satz 6.2.1.** Seien f und g auf $[a,b]$ integrierbar. Dann gilt

`nt_regeln_a` (i) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \text{für } c \in (a,b)$

`nt_regeln_b` (ii) $\displaystyle\int_a^b \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{für } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

`nt_regeln_c` (iii) Aus $f(x) \le g(x)$ auf $[a,b]$ folgt $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

`nt_regeln_d` (iv) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

Bemerkungen 6.2.2:

(a) Teil (i) bleibt für beliebiges c richtig, falls die Teilintegrale existieren. Dabei definiert man

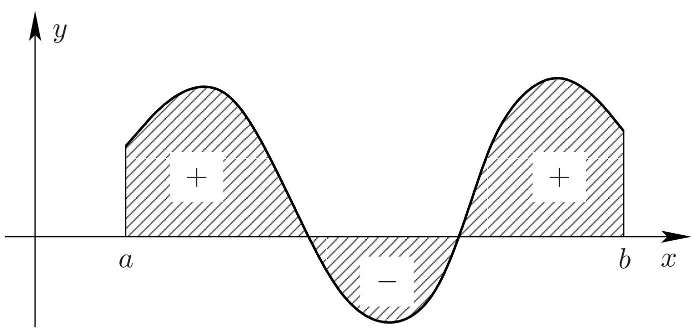
$$\int_a^a f(x)\,dx := 0 \quad \text{und} \quad \int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{für } a > b.$$

(b) Kombination von Satz 6.1.2 und Satz 6.2.1 (i) zeigt, dass alle stückweise stetigen Funktionen integrierbar sind.

6.2.2 Flächeninhalt

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $f(x) \ge 0$ auf $[a,b]$ und $a \le b$, so ist $A := \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse. Im Fall $f(x) \le 0$ auf $[a,b]$ ist der Flächeninhalt durch $A := -\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ gegeben. Allgemein gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \;&=\; \{\text{Flächeninhalt der Bereiche oberhalb der } x\text{-Achse}\}\\ &-\; \{\text{Flächeninhalt der Bereiche unterhalb der } x\text{-Achse}\}\end{aligned}$$



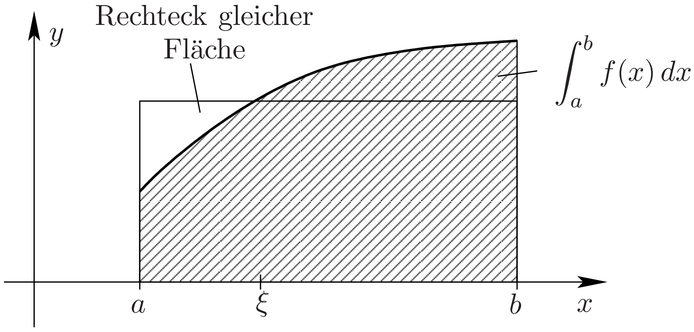
6.2.3 Mittelwertsatz der Integralrechnung

atz:int_mws

Satz 6.2.3. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Geometrische Bedeutung: Die Fläche zwischen der x-Achse und der Kurve $y = f(x)$ (im Bereich $a \leq x \leq b$) ist gleich der Rechtecksfläche über $[a,b]$ mit der Höhe $f(\xi)$ für eine Stelle $\xi \in (a,b)$.



6.3 Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung

Wie kann man $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ohne Betrachtung von Zerlegungssummen berechnen?

HS_diff_int

Satz 6.3.1 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.**

_diff_int_a

(i) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in [a,b]$ beliebig und $F(x) := \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\,dt$ für $x \in [a,b]$.
Dann ist F differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$ für $x \in [a,b]$.

(ii) Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $F'(x) = f(x)$ für $x \in [a,b]$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$$

_diff_int_b

Beweis.

(i) Es ist

$$F(x+h) - F(x) = \int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Nach Satz 6.2.3 gibt es eine Stelle ξ zwischen x und $x+h$ mit

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi)\cdot h$$

Dabei hängt ξ von h ab, also $\xi = \xi(h)$, und wegen $x < \xi(h) < x+h$ gilt $\xi(h) \to x$ für $h \to 0$. Daher folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi(h)) = f(x),$$

da f nach Voraussetzung stetig ist. Also existiert $F'(x)$ und es ist $F'(x) = f(x)$.

(ii) Setze $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Dann ist $G(a) = 0$ und $G(b) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Nach Teil (i) dieses Satzes gilt $G'(x) = f(x)$, also folgt

$$(F - G)'(x) = 0 \quad \text{für alle } x \text{ in } [a, b].$$

Nach Korollar 5.3.3 (i) ist $F - G$ konstant, insbesondere $F(a) - G(a) = F(b) - G(b)$ und damit

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Bemerkung 6.3.2. Eine differenzierbare Funktion F mit $F'(x) = f(x)$ auf $[a, b]$ heißt *Stammfunktion von* f. Sind F und G zwei Stammfunktionen von f, so gilt $(F - G)' = 0$, also $G(x) = F(x) + c$ mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$. Man erhält also alle Stammfunktionen zu f durch Addition von Konstanten. Eine Stammfunktion von f nennt man auch *unbestimmtes Integral von* f und schreibt dafür $\int f(x)\,dx$. Um alle Stammfunktionenen von f anzugeben, wird die (frei wählbare) sogenannte Integrationskonstante c mit aufgeführt.

Liste einiger Stammfunktionen.

$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c \quad \text{für } r \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \qquad \int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$$

6.4 Integrationsmethoden

6.4.1 Partielle Integration (Produktregel)

Unbestimmte Integration der Produktregel $(f\,g)' = f'g + fg'$ liefert

$$\boxed{\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx,}$$

und damit

$$\boxed{\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.}$$

Anwendung zur Berechnung von $\int h(x)\,dx$: Versuche h als $f'\,g$ zu schreiben, und zwar so, daß $\int fg'\,dx$ einfacher zu berechnen ist.

Beispiele 6.4.1:

(a) $\int x\sin x\,dx = ?$ Hier: $g(x) = x, f'(x) = \sin x \Rightarrow f(x)g'(x) = -\cos x$
$\Rightarrow \int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx$
$= -x\cos x + \sin x + c$

(b) $\int \ln x\,dx = ?$ Hier: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; deshalb $g(x) = \ln x$, also $f'(x) = 1$.
$\Rightarrow \int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c.$

(c) $\int \sin^2 x\,dx = \int \sin x\sin x\,dx = -\cos x\sin x + \int \cos^2 x\,dx \qquad \Big| + \int \sin^2 x\,dx$
$\Rightarrow 2\int \sin^2 x\,dx = -\sin x\cos x + \int dx \;\Rightarrow\; \int \sin^2 x\,dx = \dfrac{x - \sin x\cos x}{2} + c$

6.4.2 Substitution (Kettenregel)

Für differenzierbare Funktionen F und g gilt $F(g(t))' = F'(g(t))g'(t)$ nach der Kettenregel. Also folgt mit $f = F'$:

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = \int F(g(t))'\,dt = F(g(t)) + c.$$

In die Stammfunktion F von f ist also $g(t)$ als Argument einzusetzen. Als Abkürzung für diese Ersetzung verwendet man die Schreibweise: $[h(x)]_{x=g(t)} := h(g(t))$.

Dann lautet die Substitutionsregel für unbestimmte Integrale

$$\boxed{\int f(g(t))g'(t)\,dt = \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=g(t)}},$$

falls f stetig und g stetig differenzierbar ist.

Beispiel 6.4.2: $\int \sin t\cos^2 t\,dt = -\int \cos^2 t\,(\cos t)'\,dt$; hier: $g(t) = \cos t,\ f(x) = x^2$. Also folgt

$$\int \sin t\cos^2 t\,dt = \left[-\int x^2\,dx\right]_{x=\cos t} = \left[-\frac{1}{3}x^3 + c\right]_{x=\cos t} = -\frac{1}{3}\cos^3 t + c.$$

Oft wird die Substitutionsregel „von rechts nach links“ angewendet; dazu benötigt man die Umkehrbarkeit von g. Es gilt

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \left[\int f(g(t))g'(t)\,dt\right]_{t=g^{-1}(x)}},$$

falls f stetig und g stetig differenzierbar mit $g'(t) \neq 0$ ist.

Beispiel 6.4.3: $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = ?$

Hier: $e^x = t$ substituieren; also $x = \ln t$, d.h. $g(t) = \ln t$, $g'(t) = \frac{1}{t}$.

$$\Rightarrow \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \left[\int \frac{e^{\ln t}}{e^{2\ln t}+1}\frac{1}{t}\,dt\right]_{t=e^x} = \left[\int \frac{t}{t^2+1}\frac{1}{t}\,dt\right]_{t=e^x} = \left[\int \frac{dt}{t^2+1}\right]_{t=e^x}$$
$$= \Big[\arctan t + c\Big]_{t=e^x} = \arctan(e^x) + c.$$

Beim Anwenden der Substitutionsregel benutzt man oft die Leibniz'sche Schreibweise, d.h. $\dfrac{dx}{dt}$ für $x'(t)$, und rechnet mit $\dfrac{dx}{dt}$ formal wie mit einem gewöhnlichen Bruch; im Beispiel von oben:

$$e^x = t \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dx} = e^x, \text{ also } dt = e^x\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{dt}{t^2+1}$$

Dabei wird die Ersetzungsklammer $[\dots]_{t=g^{-1}(x)}$ meist weggelassen. Anschließend muss an die Rücksubstitution gedacht werden!

Beispiel 6.4.4: $\displaystyle\int \sin\sqrt{x}\,dx = ?$

Substitution: $t = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad x = t^2, \quad dx = 2t\,dt$

$$\Rightarrow \quad \int \sin\sqrt{x}\,dx = \int (\sin t)2t\,dt = 2\int t\sin t\,dt$$
$$= 2t(-\cos t) - 2\int(-\cos t)\,dt = -2t\cos t + 2\sin t + c.$$

Rücksubstitution:

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + c.$$

Bemerkung 6.4.5. Das Ergebnis einer unbestimmten Integration kann durch Differenzieren leicht nachgeprüft werden!

Bei Substitution in bestimmten Integralen sind die Grenzen mit zu transformieren:

$$\boxed{\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \quad \text{mit } \alpha = g(a),\ \beta = g(b),}$$

falls f stetig und g stetig differenzierbar ist.

Beispiel 6.4.6: $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t(1+\ln t)} = ?$

Substitution: $x = \ln t$, $dx = \dfrac{1}{t}\,dt$ $\left(\text{also } g(t) = \ln t,\ f(x) = \dfrac{1}{x+1}\right)$

$$\Rightarrow \quad \int_1^e \frac{dt}{t(1+\ln t)} = \int_{\ln 1}^{\ln e} \frac{dx}{1+x} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x|\Big|_0^1 = \ln 2.$$

6.4.3 Einige Standardsubstitutionen

(a) Integrale mit (ganzzahligen) *Potenzen von* e^x:

Substituiere $t = e^x \quad \Rightarrow \quad dt = e^x\,dx,\ dx = \frac{1}{t}\,dt$

Beispiele 6.4.7:

(a) $\displaystyle\int \frac{1+e^{2x}}{e^x}\,dx = \int \frac{1+t^2}{t}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt = t - \frac{1}{t} + c = e^x - e^{-x} + c.$

(b) $\displaystyle\int \frac{\cosh x}{1+e^x}\,dx = ?$ Beachte: $\cosh x,\ \sinh x$ sind mittels $e^x,\ e^{-x}$ definiert!

$$\begin{aligned}\int \frac{\cosh x}{1+e^x}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{e^x+e^{-x}}{1+e^x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{t+\frac{1}{t}}{1+t}\frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+1}{t^2+t^3}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+t^3} = \frac{1}{2}\ln|1+t| + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+t^3}.\end{aligned}$$

Unklar ist: wie berechnet man $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+t^3}$? Dies später („Partialbruchzerlegung”).

(b) Integrale mit *Potenzen von* x *und* $\sqrt[n]{ax+b}$ $(n \in \mathbb{N})$*:*

Substituiere $t = \sqrt[n]{ax+b} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{t^n - b}{a},\ dx = \frac{n}{a}t^{n-1}\,dt.$

Beispiele 6.4.8:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx = ?$ Hier: $t = \sqrt{x-1},\ x = t^2+1,\ dx = 2t\,dt$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx &= \int \frac{t^2+1}{t}2t\,dt = 2\int (t^2+1)\,dt = \frac{2}{3}t^3 + 2t + c \\ &= \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + 2(x-1)^{\frac{1}{2}} + c.\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}\,dx = ?$ Hier: $t = \sqrt[3]{x+1},\ x = t^3-1,\ dx = 3t^2\,dt$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}\,dx = \int \frac{t}{t^3-1}3t^2\,dt = 3\int \frac{t^3}{t^3-1}\,dt = 3t + 3\int \frac{dt}{t^3-1}.$$

Unklar ist: wie berechnet man $\displaystyle\int \frac{dt}{t^3-1}$? Dazu später.

(c) Integrale mit *Potenzen von* x *und* $\sqrt{1-x^2}$*:*

Substituiere $x = \sin t \quad \Rightarrow \quad dx = \cos t\,dt,\ \sqrt{1-x^2} = \cos t.$

Beispiele 6.4.9:

(a) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{1}{4}\int \sin^2 2t\,dt$

Mit der Substitution $y = 2t,\ dy = 2\,dt$ erhält man weiter

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 y\,dy = \frac{y - \sin y\cos y}{16}.$$

Nach Rücktransformationen folgt daraus

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{8}\arcsin x - \frac{1}{8}\,x\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}\,x^3\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(b) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$. Hier besser $y = 1 - x^2$ substituieren, denn $\dfrac{dy}{dx} = -2x$ und der Integrand enthält den Faktor x.

$$\Rightarrow \quad \int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{y}\,dy = -\frac{1}{3}\,y^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}\,\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

(d) Integrale mit *Potenzen von x und $\sqrt{x^2-1}$:*

Substituiere $x = \cosh t \quad \Rightarrow \quad dx = \sinh t\,dt,\ \sqrt{x^2-1} = \sinh t.$

Beispiel 6.4.10: $\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sinh^2 t\,dt$. Mit partieller Integration erhält man

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\cosh t\sinh t - \frac{t}{2} = \frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\operatorname{arcosh} x$$

(e) Integrale mit *Potenzen von x und* $\sqrt{x^2+1}$:

Substituiere $x = \sinh t \quad \Rightarrow \quad dx = \cosh t\,dt,\ \sqrt{x^2+1} = \cosh t$

Beispiel 6.4.11: $\displaystyle\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx = \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx \ \ (\text{für } x>0) \quad = \int \frac{\cosh^2 t}{\sinh t}\,dt$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{e^t - e^{-t}}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{y^2+2+\frac{1}{y^2}}{y-\frac{1}{y}}\,\frac{1}{y}\,dy \ (\text{nach Substitution } y = e^t)$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{y^4+2y^2+1}{y^4-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int dy + \frac{1}{2}\int \frac{3y^2+1}{y^4-y^2}\,dy$$

Unklar: wie berechnet man $\displaystyle\int \frac{3y^2+1}{y^4-y^2}\,dy$?

Diese Beispiele zeigen, dass man oft Stammfunktionen von rationalen Funktionen (also Funktionen der Form $P(x)/Q(x)$ mit Polynomen P, Q) bestimmen muss. Dazu benötigt man die sogenannte

6.4.4 Partialbruchzerlegung

Aufgabe: $\boxed{\text{Berechne } \displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \text{ für gegebene Polynome } P \text{ und } Q.}$

Grundidee: Schreibe die rationale Funktion $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ als Summe einfacher Brüche, etwa

$$\frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}.$$

Beispiel 6.4.12: $P(x) = x^4 - 8x^2 - 4x + 13$, $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, also

$$\int \frac{x^4 - 8x^2 - 4x + 13}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}\, dx$$

Es sind folgende Schritte auszuführen:

(a) *Polynomdivision* solange, bis Grad des Zählers kleiner als Grad des Nenners ist.

$$(x^4 - 8x^2 - 4x + 13) : (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = x + 2 + \frac{x^2+1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$$

(b) *Zerlege den Nenner.*

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x+2)(x-3)$$

(c) *Partialbruchzerlegung.*

(i) Wenn alle Nullstellen des Nenners reell und verschieden sind:
Ansatz: $\dfrac{x^2+1}{(x-3)(x-1)(x+2)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+2}$
Ansatz auf gemeinsamen Nenner bringen; dies ergibt

$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{(x-3)(x-1)(x+2)} &= \frac{A(x-1)(x+2) + B(x-3)(x+2) + C(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{A(x^2+x-2) + B(x^2-x-6) + C(x^2-4x+3)}{(x-3)(x-1)(x+2)}\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich, d.h. die Faktoren der gleichen x-Potenzen müssen links und rechts übereinstimmen. Dies liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + B + C &= 1 \\ A - B - 4C &= 0 \\ -2A - 6B + 3C &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \ \dots \ \Rightarrow \quad A = 1,\ B = -\frac{1}{3},\ C = \frac{1}{3}.$$

Ergebnis:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}\, dx &= \int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2} \\ &= \ln|x-3| - \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x+2| + c.\end{aligned}$$

(ii) Wenn der Nenner mehrfache reelle Nullstellen hat:

Beispiel 6.4.13: $P(x) = 1$, $Q(x) = (x-1)^2(x+2)$.

Ansatz: $\dfrac{1}{(x-1)^2(x+2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{x+2}$

Weiter wie in (i); dies gibt die Koeffizienten $A = -\frac{1}{9},\ B = \frac{1}{3},\ C = \frac{1}{9}$

Ergebnis: $\displaystyle\int \frac{dx}{Q(x)} = -\frac{1}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{9}\ln|x+2|.$

(iii) Wenn nicht alle Nullstellen des Nenners reell sind:

Beispiel 6.4.14: $P(x) = 1$, $Q(x) = (x-1)(x^2+1)$.

Ansatz: $\displaystyle\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$

Weiter wie in (i); dies gibt die Koeffizienten $A = \frac{1}{2},\ B = C = -\frac{1}{2}$.

Ergebnis: $\displaystyle\int \frac{dx}{Q(x)} = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx.$

Allgemein: *Rechenschema für die Integration rationaler Funktionen.*

Gesucht ist $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ für Polynome P und Q.

1. Schritt: Ist Grad von $P <$ Grad von Q ? Falls ja: weiter mit Schritt 2. Falls nein: Teile $P(x)$ durch $Q(x)$ mit Rest. Dies liefert

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{\widetilde{P}(x)}{Q(x)}$$

mit den Polynomen R, $\widetilde{P}$ wobei Grad von $\widetilde{P}$ kleiner als Grad von Q ist. Der Teil $\int R(x)\,dx$ ist leicht zu berechnen. Wende daher die folgenden Schritte auf $\frac{\widetilde{P}}{Q}$ an.

2. Schritt: Zerlegung von $Q(x)$ in Faktoren der Form $(x-a)^m$ und $((x-a)^2+b^2)^n$. Dazu sind zunächst alle reellen Nullstellen von Q zu bestimmen (schwierig!).

Jede dieser Nullstellen liefert einen Faktor der Form $(x-a)$. Dies ergibt die Zerlegung

$$Q(x) = (x-x_1)^{m_1}\,(x-x_2)^{m_2}\ \dots\ (x-x_k)^{m_k}\,Q_r(x)$$

mit einem Polynom $Q_r(x)$ ohne reelle Nullstelle. Anschließend ist Q_r in quadratische Faktoren zu zerlegen.

3. Schritt: Aufspalten von $\frac{P(x)}{Q(x)}$ in Partialbrüche. Verwende dazu für

den Faktor in $Q(x)$	den Ansatz
$(x-a)^m$	$\displaystyle\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a)^m}$
$((x-a)^2+b^2)^n$	$\displaystyle\frac{A_1x+B_1}{(x-a)^2+b^2} + \frac{A_2x+B_2}{((x-a)^2+b^2)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{((x-a)^2+b^2)^n}$

Berechnung der Konstanten A_i, B_i durch Koeffizientenvergleich oder Einsetzen spezieller Werte für x oder „Grenzwertverfahren“ (siehe unten).

4. Schritt: Integration der Partialbrüche. Verwende dazu

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + c$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = -\frac{1}{m-1}\,\frac{1}{(x-a)^{m-1}} + c \text{ (für } m \geq 2)$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{A}{2}\ln|(x-a)^2+b^2| + \frac{Aa+B}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c$$

Für den Nenner $((x-a)^2+b^2)^n$ mit $n \geq 2$ lässt sich durch partielle Integration eine Rekursionsformel herleiten (→ Übung). Man kann beweisen, dass die Schritte 1–4 stets durchführbar sind. Daher sind alle rationalen Funktionen elementar integrierbar.

Beispiele 6.4.15:

(a) Ansatz zur Partialbruchzerlegung von $\frac{P(x)}{Q(x)}$ mit

$$Q(x) = (x-1)(x-2)^3(x^2+1)^2((x-3)^2+9) \quad (\text{Grad von } P \leq 9)$$

$$\frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{(x-2)^2} + \frac{A_4}{(x-2)^3} + \frac{A_5x+A_6}{x^2+1} + \frac{A_7x+A_8}{(x^2+1)^2} + \frac{A_9x+A_{10}}{(x-3)^2+9}$$

(b) Berechne $\displaystyle\int \frac{x^3+5x}{x^4-6x^2+8x+24}\,dx$

1. Schritt: Entfällt.

2. Schritt: Ausprobieren von $x = \pm 1, \pm 2, \ldots$ liefert $x = -2$ als doppelte Nullstelle des Nennerpolynoms.

$$\Rightarrow \quad Q(x) = (x+2)^2(x^2-4x+6).$$

Weitere reelle Nullstelle ? $x^2-4x+6 = (x-2)^2+2$, also keine reellen Nullstellen.

3. Schritt: Ansatz

$$\frac{x^3+5x}{(x+2)^2((x-2)^2+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx+D}{(x-2)^2+2}.$$

Berechnung von B durch Grenzwertverfahren: Multipliziere beide Seiten mit $(x+2)^2$. Auf der rechten Seite lautet der mittlere Summand dann B, und die anderen Summanden enthalten (mindestens einmal) den Faktor $(x+2)$. Lässt man nun x gegen -2 gehen, so bleibt auf der rechten Seite nur B stehen!

Insgesamt erhält man so $\frac{(-2)^3+5(-2)}{(-4)^2+2} = B$, also $B = -1$.

Zur Bestimmung der restlichen Koeffizienten kann man z.B. drei spezielle Werte für x einsetzen. Dies gibt drei Gleichungen für die drei Unbekannten A, C, D.

$$\begin{aligned}
x = 0: &\qquad 0 = \frac{A}{2} + \frac{-1}{4} + \frac{D}{6} \\
x = 1: &\qquad \frac{6}{9 \cdot 3} = \frac{A}{3} + \frac{-1}{9} + \frac{C+D}{3} \\
x = 3: &\qquad \frac{18}{16 \cdot 2} = \frac{A}{4} + \frac{-1}{16} + \frac{2C+D}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3A + D = \frac{3}{2} \\
\Rightarrow \quad & A + C + D = 1 \qquad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2},\ D = 0 \\
& A + 4C + 2D = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

4. Schritt:

$$\begin{aligned}
\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+2} - \int \frac{dx}{(x+2)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{x}{(x-2)^2+2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|x+2| + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{4}\ln|(x-2)^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) + c
\end{aligned}$$

6.5 Uneigentliche Integrale

Unter welchen Vorraussetzungen und wie lassen sich bestimmte Integrale über unbeschränkte Integrationsbereiche bzw. mit unbeschränkten Integranden definieren? Etwa

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

6.5.1 Unbeschränkter Integrationsbereich

Definition 6.5.1. Es sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a, b]$ (für $b > a$) integrierbar. Falls der Grenzwert

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

existiert, so definiert man das *uneigentliche Integral von f über $[a, \infty)$*
durch

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx}$$

Analog definiert man die uneigentlichen Integrale

$$\boxed{\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx}$$

und

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx} \quad \text{(mit beliebigem } a \in \mathbb{R})$$

falls die rechten Seiten existieren.

Bemerkungen 6.5.2:

(i) Wenn z.B. $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ existiert, so sagt man auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$ existiert oder *konvergiert*. Sonst heißt $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *divergent.*

Existiert sogar $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$, so heißt das Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *absolut konvergent.*

(ii) F sei eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a),$$

falls der Grenzwert existiert.

(iii) Damit $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ existiert, müssen beide Teilintegrale (d.h. die entsprechenden Grenzwerte) unabhängig voneinander existieren.

Beispiele 6.5.3:

(a) $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$; es ist $\int_0^b e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^b = -e^{-b} + 1.$

Also gilt

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} (1 - e^{-b}) = 1, \text{ d.h. } \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

(b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$; berechne zunächst $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \left(\arctan x\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}$$

Man schreibt oft kurz:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

Entsprechend:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_{-\infty}^0 = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

(c) $\int_{-\infty}^\infty x\,dx = ?$

$$\int_0^\infty x\,dx = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{2}x^2\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}b^2 = \infty$$

Fazit: $\int_{-\infty}^\infty x\,dx$ existiert nicht (oder: ist divergent).

Falsch wäre: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} x\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}x^2\Big|_{-b}^{b}\right) = 0.$

jorantenkrit

Satz 6.5.4 (Majoranten-/Minorantenkriterium)**.** (a) Es gelte $|f(x)| \le g(x)$ auf $[a,\infty)$ und $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ existiere. Dann ist $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ (absolut) konvergent und es gilt

$$\left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right| \le \int_a^\infty |f(x)|\,dx \le \int_a^\infty g(x)\,dx.$$

(b) Es gelte $f(x) \ge g(x) \ge 0$ auf $[a,\infty)$ und $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ sei divergent. Dann ist auch $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergent.

Beispiel 6.5.5:

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx \text{ existiert, denn } \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2} \text{ und } \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 1.$$

6.5.2 Unbeschränkter Integrand

Definition 6.5.6. Sei f stetig in $[a,b]\setminus\{x_0\}$ (typische Situation: f ist bei x_0 unbeschränkt). Unter dem uneigentlichen Integral $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ versteht man:

(i) im Fall $x_0 = b$: $\displaystyle\lim_{x\to b-}\int_a^x f(t)\,dt,$

(ii) im Fall $x_0 = a$: $\displaystyle\lim_{x\to a+}\int_x^b f(t)\,dt,$

(iii) im Fall $x_0 \in (a,b)$: $\displaystyle\lim_{x\to x_0-}\int_a^x f(t)\,dt + \lim_{x\to x_0+}\int_x^b f(t)\,dt,$
falls die jeweiligen Grenzwerte existieren.

Beispiel 6.5.7: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}};$ hier: f ist unbeschränkt bei $t_0 = 0$. Es gilt

$$\lim_{x\to 0+}\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{x\to 0+}\left(2\sqrt{t}\,\Big|_x^1\right) = \lim_{x\to 0+}\left(2 - 2\sqrt{x}\right) = 2.$$

allgemeiner: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = 1:\ \int_0^1 \frac{dt}{t} = \lim_{x\to 0+}\left(\ln|t|\,\Big|_x^1\right) = \infty$$

$$\alpha \ne 1:\ \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{1-\alpha}t^{1-\alpha}\Big|_x^1\right) = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{1-\alpha}\left(1 - x^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ \infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

Fazit: $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ existiert } \Leftrightarrow \alpha < 1}$.

Auf diesem Beispiel basiert

satz:6.5

Satz 6.5.8. Sei f stetig in $[a, b] \setminus \{x_0\}$. Gilt in einer Umgebung von x_0

satz:6.5_a

(i) $|f(x)| \le \dfrac{c}{|x - x_0|^\alpha}$ mit $\alpha < 1$ und $c \in \mathbb{R}$, so existiert $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

satz:6.5_b

(ii) $|f(x)| \ge \dfrac{c}{|x - x_0|^\alpha}$ mit $\alpha \ge 1$ und $c \in \mathbb{R}$, so ist $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ divergent.

Der Beweis von Satz 6.5.8 (i) beruht auf dem zu Satz 6.5.4 analogen Majorantenkriterium.

Beispiele 6.5.9:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$; hier ist $x_0 = 1$ und

$$|f(x)| = \frac{1}{|(1-x)(1+x)|} \ge \frac{1}{2}\frac{1}{|x-1|} \quad \Rightarrow \text{ Integral ist divergent.}$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; hier ist $x_0 = 1$ und

$$|f(x)| = \frac{1}{|(1-x)(1+x)|^{\frac{1}{2}}} \le \frac{1}{|x-1|^{\frac{1}{2}}} \quad \Rightarrow \text{ Integral existiert.}$$

6.6 Numerische Integration

Für das Folgende wollen wir voraussetzen, dass das zu berechnende bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ existiert. Trotzdem kann es sein, dass es nur näherungsweise numerisch berechnet werden kann. Das trifft z.B. zu, wenn

- f keine elementare Stammfunktion besitzt, z.B. $f(x) = e^{-x^2}$,
- die Bestimmung der Stammfunktion zu kompliziert ist,
- f nur tabellarisch gegeben ist (Messwerte).

In solchen Fällen wird der zu berechnende Integralausdruck angenähert ausgewertet durch numerische Integration (Quadratur):

$$I := \int_a^b f(x)\,dx \;\approx\; \tilde{I} := \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

Die Gewichte w_i, die Stützstellen x_i und die Anzahl der Stützstellen und der Funktionsauswertungen n bestimmen Methode und Genauigkeit.

Die "Integration von Tabellendaten" wird hier nicht behandelt. Durch eine Wertetabelle kann eine interpolierende oder approximierende Funktion gelegt werden, die dann exakt integriert werden kann.

6.6.1 Newton-Cotes-Formeln

Dies ist die einfachste Idee: Um das Integral I zu berechnen, wird f durch ein interpolierendes Polynom p ersetzt und dieses exakt integriert. Die zur Interpolation benötigten Funktionswerte werden an $m + 1$ äquidistanten Stellen berechnet.

Für $m = 1$ und $m = 2$ ergeben sich die folgenden Formeln:

$$\text{Trapezregel}: \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)),$$

$$\text{Simpsonregel}: \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)).$$

Soll die Genauigkeit erhöht werden, so werden diese einfachen Näherungsformeln mehrfach aneinandergesetzt. Sei zu gegebenem n

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \text{und} \quad x_j = a + j\,h, \quad j = 0, 1, \cdots, n.$$

Dann liefert das Aneinanderhängen von n Trapez- bzw. $n/2$ Simpsonregeln (n gerade!) die Näherungsformeln

$$\begin{aligned} \tilde{I} = T(h) &= \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right), \\ \tilde{I} = S(h) &= \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + +2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)). \end{aligned}$$

Sind Schranken für die 2. bzw. 4. Ableitung der zu integrierenden Funktion bekannt, so lässt sich der Fehler dieser Regeln abschätzen:

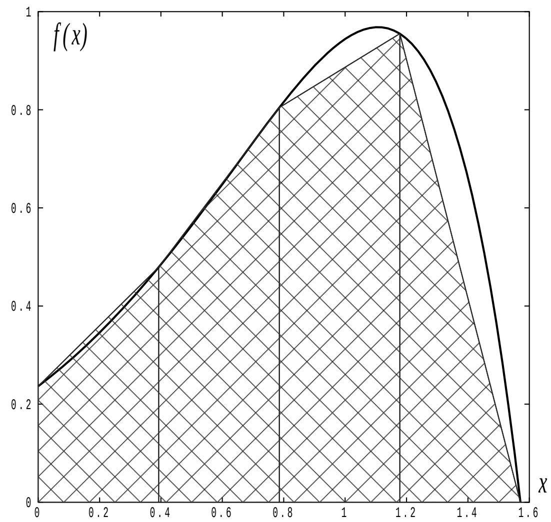
$$|I - T(h)| \leq \frac{|b-a|}{12} h^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|, \qquad |I - S(h)| \leq \frac{|b-a|}{180} h^4 \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

bsp6-1 **Beispiel 6.6.1:**

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{5.0}{e^\pi - 2} \exp(2x)\,\cos(x)\,dx \;=\; 1.0.$$

Die Zeichnung unten zeigt die Trapezfläche, die als Näherung für das Integral bei $n = 4$ entsteht, und den Integranden. Die Ergebnisse für Trapez- und Simpsonregel sind in der folgenden Tabelle festgehalten:

Regel	h	$\tilde{I}$	Fehler $I - \tilde{I}$	Fehlerabschätzung
Trapez	$\pi/8$	0.926	0.074	0.12
Simpson	$\pi/8$	0.9925	0.0075	0.018



Index

abgeschlossenes Intervall, 10
Ableitung, 56
  einseitige, 57
  n-te, 64
  zweite, 64
absolut konvergente
  Reihe, 47
  uneigentliche Integrale, 86
Absolutbetrag, 10
abzählbar, 4
Additionstheoreme, 33
Äquivalenz, 2
algebraische Gleichung, 19
Allquantor, 6
alternierende harmonische Reihe, 46
alternierende Reihe, 46
Anordnung der reellen Zahlen, 8
Arcuscosinus, 36
Arcussinus, 36
Arcustangens, 36
Areacosinushyperbolicus, 26
Argument, 33
  einer Funktion, 24
Aussage, 1
Aussageform, 2

Bernoulli'sche Ungleichung, 9
beschränkte
  Folge, 41
  Funktion, 27
bestimmt divergente Folge, 41
bestimmtes Integral, 74
Betrag
  einer komplexen Zahl, 31
  einer reellen Zahl, 10
Beweis
  direkter, 4
  durch Widerspruch, 5
  indirekter, 5
bijektiv, 25
Bildmenge, 24
Binomialkoeffizient, 7
Binomische Formeln, 7

Cauchy-Folge, 44
Cauchy-Produkt, 46
Cosinus, 32
Cosinus hyperbolicus, 25
Cosinussatz, 34
Cotangens, 35

Definitionsbereich, 24
  maximaler, 24
dekadischer Logarithmus, 15
Differentialquotient, 57
Differenz
  von Mengen, 3
Differenzenquotient, 57
Differenzierbarkeit, 56
  mehrfache, 64
direkter Beweis, 4
disjunkt, 3
Disjunktion, 1
Diskriminante, 20
divergente
  Folge, 40
  Reihe, 44
  uneigentliche Integrale, 86
Dodekaeder, 37
Dreiecksungleichung, 10, 31
Durchschnitt, 3

e, 17
einseitige Ableitung, 57
Element, 2
Entwicklungsstelle, 48
ε-Umgebung, 40
Euler'sche Zahl, 17
Euler'sches Theorem, 34
Existenzquantor, 6
Exponentialreihe, 50
exponentielle Standardform, 13
Extremum
  globales, 65
  lokales, 65

strenges lokales, 65

Fakultät, 7
Feinheit einer Zerlegung, 73
Fibonacci-Zahlen, 39
Flächeninhalt, 75
Folge, 39
  beschränkte, 41
  bestimmt divergente, 41
  Cauchy-, 44
  der Partialsummen, 44
  divergente, 40
  konvergente, 40
  monoton fallende, 40
  monoton wachsende, 40
  monotone, 40
  Null-, 40
  rekursiv definierte, 40
  streng monoton fallende, 40
  streng monoton wachsende, 40
  streng monotone, 40
Folgenglied, 39
Folgenindex, 39
Formel von Hadamard, 49
Funktion, 23
  Ableitung einer, 56
  beschränkte, 27
  bijektive, 25
  differenzierbare, 56
  gerade, 27
  hyperbolische, 25
  injektive, 25
  integrierbare, 74
  monoton fallende, 27
  monoton wachsende, 27
  monotone, 27
  n-mal differenzierbare, 64
  periodische, 27
  -sgraph, 24
  stetige, 52
  streng monoton fallende, 27
  streng monoton wachsende, 27
  streng monotone, 27
  surjektive, 25
  -swert, 24
  Umkehr-, 25
  ungerade, 27
  zweimal differenzierbare, 64

ganze Zahlen, 3
Gaußklammerfunktion, 41
Gauß'sche Zahlenebene, 31
geometrische Reihe, 44
gerade Funktion, 27
Gleichung
  algebraische, 19
globales Extremum, 65
Grad eines Polynoms, 19
Graph, 24
  der Umkehrfunktion, 26
Grenzwert, 40
  linksseitiger, 52
  rechtsseitiger, 52
  von Funktionen, 52
Grenzwertsätze, 42
Grenzwertsätze
  für Funktionen, 52

Häufungspunkt
  einer Folge, 40
höhere Ableitungen, 64
Hadamard-Formel, 49
halboffenes Intervall, 10
harmonische Reihe, 45
Hauptsatz der Algebra, 31
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 76
Heron-Verfahren, 40
hinreichend, 2
Hôpital, Regel von de L', 64
Hyperbolische Funktionen, 25

i, 30
Ikosaeder, 37
imaginäre Einheit, 30
Imaginärteil, 30
Implikation, 1
Index einer Folge, 39
indirekter Beweis, 5
Induktionsanfang, 6
Induktionsschritt, 6
injektiv, 25
Integral
  bestimmtes, 74
  unbestimmtes, 77
  uneigentliches, 85, 87
integrierbare Funktion, 74
Interpolationspolynom, 88
Intervall, 10
  abgeschlossenes, 10
  halboffenes, 10
  offenes, 10

Intervalllänge, 10
irrationale Zahlen, 4
Iterationsverfahren, Newton'sches, 66

Kartesisches Produkt, 3
Kettenregel, 59
komplexe Zahl, 30
Konjugation, 31
konjugiert komplexe Zahl, 31
Konjunktion, 1
Kontrapositionsgesetz, 2
konvergente
    Folge, 40
    Reihe, 44
    uneigentliche Integrale, 86
Konvergenzradius, 49
Kurvendiskussion, 66

Lagrange-Restglied, 69
leere Menge, 3
Leibniz-Kriterium, 46
Limes, 40
linksseitiger Grenzwert, 52
Lösungsmenge, 9
Logarithmus
    dekadischer, 15
    natürlicher, 18
lokales Extremum, 65

Majorantenkriterium
    für Reihen, 47
    für uneigentliche Integrale, 87
Mantisse, 13
maximaler Definitionsbereich, 24
Maximum
    globales, 65
    lokales, 65
    strenges lokales, 65
Menge, 2
    leere, 3
Mengendifferenz, 3
Minimum
    globales, 65
    lokales, 65
    strenges lokales, 65
Minorantenkriterium
    für Reihen, 48
    für uneigentliche Integrale, 87
Mittelwertsatz, 62
    der Integralrechnung, 76
monoton fallende
    Folge, 40
    Funktion, 27
monoton wachsende
    Folge, 40
    Funktion, 27
monotone
    Folge, 40
    Funktion, 27

natürliche Zahlen, 3
natürlicher Logarithmus, 18
Negation, 1
Newton-Cotes-Formeln, 88
Newton-Verfahren, 66
normalisierte Gleitpunktdarstellung, 13
notwendig, 2
n-te Wurzel, 9
Nullfolge, 40
Nullstelle, 20
numerische Integration, 88

Obermenge, 3
offenes Intervall, 10
Oktaeder, 37

Partialbruchzerlegung, 81
Partialsumme, 44
partielle Integration, 77
Pascal'sches Dreieck, 8
periodische Funktion, 27
Platonische Körper, 36
Polarkoordinaten, 33
Polynom, 19
    -grad, 19
    interpolierendes, 88
Potenzreihe, 48
p-q-Formel, 20
Produktregel, 59
Produktzeichen, 7
Proportionalität, 27
    umgekehrte, 28
Proportionalitätskonstante, 28
Pythagoras
    trigonometrischer, 33

quadratische Ergänzung, 20
Quadratur, 88
Quotientenkriterium, 47, 48
Quotientenregel, 59

rationale Zahlen, 3
Realteil, 30

rechtsseitiger Grenzwert, 52
reelle Zahlen, 4
Regel von de L'Hôpital, 64
Reihe, 44
  absolut konvergente, 47
  alternierende, 46
  alternierende harmonische, 46
  divergente, 44
  Exponential-, 50
  geometrische, 44
  harmonische, 45
  konvergente, 44
  -nwert, 44
  Potenz-, 48
rekursiv definierte Folge, 40
Restglied von Lagrange, 69
Riemannsumme, 73
Rolle, Satz von, 62

Satz
  von Rolle, 62
  von Taylor, 68
Signum, 10
Simpsonregel, 89
Sinus, 32
Sinus hyperbolicus, 25
Sinussatz, 34
Stammfunktion, 77
stetig ergänzbar, 53
Stetigkeit, 52
streng monoton fallende
  Folge, 40
  Funktion, 27
streng monoton wachsende
  Folge, 40
  Funktion, 27
streng monotone
  Folge, 40
  Funktion, 27
strenges lokales Extremum, 65
Substitutionsregel, 78
Summenzeichen, 6
surjektiv, 25

Tangens, 35
Taylor, Satz von, 68
Taylorpolynom, 69
Taylorreihe, 69
Teilmenge, 3
Tetraeder, 37
Tetraederwinkel, 36
Transitivität, 8
Trapezregel, 89
trigonometrischer Pythagoras, 33

überabzählbar, 4
umgekehrte Proportionalität, 28
Umkehrfunktion, 25
  Ableitung, 60
unbestimmtes Integral, 77
uneigentliches Integral, 85, 87
  absolut konvergentes, 86
  divergentes, 86
  konvergentes, 86
ungerade Funktion, 27
Ungleichung, 8
  Bernoulli'sche, 9
  Dreiecks-, 10, 31

Vereinigung, 3
Verkettung, 52
vollständige Induktion, 5

Würfel, 37
Wahrheitstafel, 2
Wendepunkt, 65
Wertebereich, 24
Widerspruchsbeweis, 5
Wurzel, 9
  n-te, 9
Wurzelkriterium, 47, 48

Zahl
  komplexe, 30
Zahlen
  ganze, 3
  irrationale, 4
  natürliche, 3
  rationale, 3
  reelle, 4
Zahlengerade, 3
Zerlegung, 73
  Feinheit einer, 73
Zuordnungsvorschrift, 23
zweite Ableitung, 64
Zwischenwertsatz, 53