Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
10.12.2009

9. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Bestimmen Sie Art und Lage der lokalen Extrema von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x,y) := (4x^2 + y^2)e^{-x^2-4y^2}.$$

Aufgabe G2

Zeigen Sie, dass die Eulersche Gammafunktion

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \quad \text{für} \quad x > 0$$

stetig ist.

Aufgabe G3

Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, so dass für ein festes $m \in \mathbb{N}$ ein q mit $0 < q < 1$ existiert, so dass

$$\|T^m x - T^m y\| \leq q\|x - y\| \text{ für alle } x, y \in X$$

gilt. Zeigen Sie

(a) Es gibt einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ von T, das heißt $T(\bar{x}) = \bar{x}$.

(b) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $T^k(x) \xrightarrow{k\to\infty} \bar{x}$.

Hinweis: Der herkömmliche Banachsche Fixpunktsatz (Beh. für $m = 1$) kann verwendet werden.
Gilt für jede Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dass aus $g^m(\bar{x}) = \bar{x}$ folgt $g(\bar{x}) = \bar{x}$?

Aufgabe G4

Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1^2 + x_2x_3, x_1x_2 + x_2x_4, x_1x_3 + x_3x_4, x_2x_3 + x_4^2)$$

ist stetig differenzierbar. Berechnen Sie $f(1, 0, 0, 1)$ und die Ableitung $f'(1, 0, 0, 1)$. Schließen Sie, dass es eine offene Umgebung V von $(1, 0, 0, 1)$ in $\mathbb{R}^4$ gibt und eine stetig differenzierbare Funktion $w : V \to \mathbb{R}^4$ derart, dass $f(w(x)) = x$ für alle $x \in V$.

Hausübung

Die Hausaufgaben H1 und H3 sind als Präsentationsaufgaben geeignet!

Aufgabe H1 (3 Punkte)

Bestimmen Sie Art und Lage der lokalen Extrema von

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ mit } g(x,y,z) := x^2 + 2y^2 + z^4 - 2x + 2y - \frac{1}{2}z + 7.$$

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gamma-Funktion für $x > 0$ unendlich oft differenzierbar ist und dass gilt

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot (\ln t)^k \cdot e^{-t} dt.$$

Aufgabe H3 (2+1 Punkte)

a) Welche der folgenden Funktionen sind Kontraktionen?

i) $f(x) := \frac{1}{8}x^2$ auf $X = [0,2]$.

ii) $g(x) := \frac{x+2}{x+1}$ auf $X = (1,2)$.

iii) $h(x) := \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $X = \mathbb{R}^2$.

iv) $k(x) := x^2$ auf $X = [1,2]$.

b) Welche der oben genannten Funktionen besitzen einen Fixpunkt?

Aufgabe H4 (8 Punkte)

Zeigen Sie, daß die Abbildung $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

für jedes $(x,y) \neq (0,0)$ lokal umkehrbar ist. Ist F auch global umkehrbar? Bestimmen Sie das Urbild $F^{-1}(\{(a,b)\})$ eines beliebigen Punktes $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.