Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
03.12.2009

8. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, & \text{für } \ y > 0, \\ -\sqrt{x^2+y^2}, & \text{für } \ y < 0, \\ x, & \text{für } y = 0. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $J_f(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y \neq 0$.

b) Bestimmen Sie alle $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$, für die die Richtungsableitungen $D_v f(0,0)$ existiert.

c) Ist f differenzierbar in $(0,0)$?

Aufgabe G2

Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion und $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{R}$$

ein Polynom vom Grad $\leq k$.
Beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)-p(h)}{\|h\|^k} = 0$,

(2) p ist das k-te Taylorpolynom von f (mit Entwicklungspunkt 0).

Aufgabe G3

Bestimme die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f\colon (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

im Punkt $(1,1)$ bis einschließlich der Glieder 2. Ordnung.

Hausübung

Die Hausaufgaben H2 und H3 a) sind als Präsentationsaufgaben geeignet!

Aufgabe H1 (3+3 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^2 \sin \frac{xy}{2} \quad \text{bzw.} \quad g(x, y) = x^2 - \cos \frac{x}{y}.$$

(a) Entwickeln Sie f nach der Taylor'schen Formel für $n = 2$ um $(1, \pi)$ (ohne das Restglied R_2 zu bestimmen).

(b) Entwickeln Sie g nach der Taylor'schen Formel für $n = 2$ um $(\pi, 1)$ (ohne das Restglied R_2 zu bestimmen).

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Sei $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^y$. Berechnen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 2 von f im Punkt $(1, 1)$. Schätzen Sie mit Hilfe des Restgliedes R_3 den Fehler ab, der entsteht, wenn Sie $1.05^{1.02}$ mit diesem Taylorpolynom berechnen.

Aufgabe H3 (4+2 Punkte)

Es sei U eine offene, konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, deren partiellen Ableitungen $D_i f$ beschränkte Funktionen sind, für $i = 1, \ldots, n$.

a) Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist (und sogar Lipschitz-stetig).

b) Zeigen Sie durch ein Beispiel im Fall $n = 1$ (oder $n = 2$), dass die Konklusion von a) im allgemeinen falsch wird, wenn U zwar offen, aber nicht konvex ist.

Hinweis: Konvex heißt, dass mit je zwei Punkten aus U auch deren Verbindungsstrecke in U liegt.