Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
26.11.2009

7. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

a) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen. Beweisen Sie $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathrm{u} = 0$ für alle zwei mal stetig differenzierbaren $u : U \to \mathbb{R}^3$.

b) Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Wir definieren eine Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $g(x, y, z) := f(x - y, y - z, z - x)$. Zeigen Sie, dass g differenzierbar ist und dass gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

Aufgabe G2

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \begin{cases} (x^2 + y^2) \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{für } \ (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } \ (x, y) = 0 \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass

a) $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existieren, im Nullpunkt aber nicht stetig sind.

b) f im Nullpunkt differenzierbar ist.

Aufgabe G3

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Abbildung der Form $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i\, v(x, y)$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$ und u, v reellwertige Funktionen sind. Identifiziert man nun 1 mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und i mit $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, kann man auch

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

schreiben.

a) (i) Schreiben Sie die linearen Abbildungen $A_1 : z \mapsto \overline{z}$ und $A_2 : z \mapsto iz$ als reelle 2×2-Matrizen.
Entscheiden Sie, ob die beiden Abbildungen auch $\mathbb{C}$-linear sind, das heißt, ob $A_k cz = cA_k z$ für $k = 1, 2$, und alle $c, z \in \mathbb{C}$ gilt.

(ii) Berechnen Sie die Jakobi-Matrizen der Abbildungen

$$z \mapsto |z|^2 \quad \text{und} \quad z \mapsto (z-i)z.$$

b) Beweisen Sie, dass eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gerade einer Multiplikation mit einer komplexen Zahl entspricht.
Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der Multiplikation mit einer Zahl $c = a + ib$.

Hausübung

Die Hausaufgaben H1 und H2 b) sind als Präsentationsaufgaben geeignet!

Aufgabe H1 (5 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \cos(xy) \quad \text{und} \quad g(x,y) = e^{x-y}$$

und die Koordinatentransformation

$$\tilde{x}(u,v) = 2u - v \quad \text{und} \quad \tilde{y}(u,v) = 2u + v.$$

Bestimmen Sie für

$$\tilde{f}(u,v) = f(\tilde{x}(u,v), \tilde{y}(u,v)) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{g}(u,v) = g(\tilde{x}(u,v), \tilde{y}(u,v))$$

mit $\tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die partiellen Ableitungen mit Hilfe der Kettenregel.

Aufgabe H2 (5+5 Punkte)

a) Begründen Sie, dass die Ableitungen der folgenden Funktionen existieren und bestimmen Sie diese:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (xy, \cosh(xy), \log(1+x^2))$

(ii) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y,z) = (x\sin(y)\cos(z), x\sin(y)\sin(z), x\cos(y))$

b) Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Geben Sie alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ an, in denen h differenzierbar ist.

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in $z_0 = x_0 + iy_0$ differenzierbar als Abbildung auf $\mathbb{R}^2$. Bekanntlich ist die Ableitung $f'(z_0)$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Beweisen Sie:
$f'(z_0)$ ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn die sogenannten Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

erfüllt sind.