Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/2010
19.11.2009

6. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

a) Es seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = (2, -4, 6), \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie alle möglichen Matrizenprodukte mit zwei Faktoren.

b) Finden Sie quadratische Matrizen A, B, C, D gleicher Dimension für die $AB \neq BA$, $CD = DC$ und $C \neq D$ gilt.

Aufgabe G2

Nach Satz 10.1 sind alle Normen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum äquivalent. Wir betrachten jetzt speziell die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$.

a) Sei $v = (1, 8, -4, 0)$. Berechnen Sie $\|v\|_1$, $\|v\|_2$ und $\|v\|_\infty$.

b) Zeichnen Sie für $n = 2$ die Einheitskreise für alle drei Normen, das heißt die Mengen

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_* < 1\}, \quad \text{wobei } * = 1, 2, \infty.$$

c) Geben Sie Äquivalenzkonstanten für $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_2$ an. Sind die von Ihnen gewählten Konstanten die bestmöglichen?

Aufgabe G3

Für $r \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ wird durch $h(r, \varphi) := r^2 \sin 4\varphi$ eine Funktion $h : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert.

a) Bestimmen Sie eine Funktion $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass $h(r, \varphi) = H(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ für jedes Paar $(r, \varphi) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ gilt.

b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen dieser Funktion in jedem Punkt. Sind diese überall stetig?

c) Zeigen Sie, dass H auch zweimal partiell differenzierbar ist.

Hausübung

Die Hausaufgaben H2 und H3 sind als Präsentationsaufgaben geeignet!

Aufgabe H1 (5+6 Punkte)

i) Beweisen Sie, dass zwei Normen $\|\cdot\|_\alpha$ und $\|\cdot\|_\beta$ auf einem Vektorraum V genau dann äquivalent sind, wenn sie die gleichen offenen Mengen liefern.

ii) Beweisen Sie Folgerung 10.2 aus der Vorlesung.

Aufgabe H2 (4 Punkte)

Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung und $\|A\|$ die durch $\|\cdot\|_1$ induzierte Operatornorm. Sei $(a_{i,j})$ eine Matrixdarstellung für A. Finden Sie eine Formel für $\|A\|$. Orientieren Sie sich an der Formel für die durch $\|\cdot\|_\infty$ induzierten Operatornorm.

Hinweis:
Schätzen Sie zuerst $\|Ax\|_1$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$ ab. Wählen Sie danach einen geeigneten kanonischen Einheitsvektor, um die Formel für $\|A\|$ zu bestimmen.

Aufgabe H3 (3+3 Punkte)

a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Bestimmen Sie alle Punkte, in denen f partiell differenzierbar ist und bestimmen Sie dort die partiellen Ableitungen.

b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \langle Ax + b, x\rangle$, wobei A eine $n \times n$ reelle Matrix ist und $b \in \mathbb{R}^n$. Berechnen Sie den Gradienten von f. Untersuchen Sie die partiellen Ableitungen auf Stetigkeit.

Hinweis:
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, so heißt der Vektor

$$(grad\, f)(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \in \mathbb{R}^n$$

der *Gradient* von f in x.