Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/2010
12.11.2009

5. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n2^n \cdot (x-2)^n \,.$$

(i) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe.

(ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe konvergiert.

(b) Zeigen Sie, daß die folgende Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x^n(1-x)) \quad , \; x \in \mathbb{R},$$

auf dem Intervall $[0,1]$ punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe G2

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische, über $[-\pi, \pi]$ R-integrierbare Funktion, die überdies gerade ist, d.h. $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Fourierreihe von f eine reine Cosinusreihe ist, d.h. von der Gestalt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \qquad \text{mit } a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\cos(kx)\,dx, \quad k \geq 0$$

ist.

Aufgabe G3

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion mit $g(x) = |x|$ für $x \in (-\pi, \pi]$. Geben Sie die Fourierreihe von g an, untersuchen Sie sie auf Konvergenz und bestimmen Sie die Grenzfunktion. Finden Sie mit Hilfe dieses Ergebnisses eine Reihendarstellung für $\frac{\pi^2}{8}$.

Hausübung

Die Hausaufgaben H1und H2 sind als Präsentationsaufgaben geeignet!

Aufgabe H1 (1+4+4+2 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion mit $f(x) = x^2$ für $x \in (-\pi, \pi]$.

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f auf $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Stellen Sie die Fourierreihe von f auf.

c) Welche Funktion stellt die Fourierreihe von f auf $[-\pi, \pi]$ dar?

d) Geben Sie damit je eine Reihendarstellung von $\frac{\pi^2}{12}$ und $\frac{\pi^2}{6}$ an.

Aufgabe H2 (6+3 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion mit $f(x) = \frac{(x-\pi)^2}{4}$ für $x \in (0, 2\pi]$.

a) Bestimmen Sie die durch (9.12) definierten Fourierkoeffizienten a_n und b_n von f.

b) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, indem Sie beide Seiten der Parsevalschen Gleichung

$$\frac{(a_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n)^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 \, dx$$

ausrechnen.