Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2009/2010
5.11.2009

4. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ und

$$f_n(x) \quad := \quad \begin{cases} n^2 - \frac{n^3}{2}x & \text{für } x \in (0, \frac{2}{n}]\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie f_n für ein allgemeines n.

b) Überprüfen Sie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz und bestimmen Sie die Grenzfunktion f.

c) Bestimmen Sie $\int_0^\infty f(x)dx$ sowie $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx$. Nehmen Sie Stellung zu Ihren Ergebnissen.

Aufgabe G2

Auf der Menge $C^1[0,1]$ der stetig differenzierbaren Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$ definieren wir eine Funktion $\|\bullet\|$ durch

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

(a) Zeigen Sie, daß $C^1[0,1]$ ein Untervektorraum des Raumes der stetigen Funktionen $C[0,1]$ ist. Zeigen Sie weiter, daß $\|\bullet\|$ eine Norm auf $C^1[0,1]$ ist.

(b) Zeigen Sie, daß $(C^1[0,1], \|\bullet\|)$ ein Banach-Raum ist.

Aufgabe G3

Wir betrachten die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^\infty f_n$, wobei

$$f_n \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \frac{1}{(2+x)^n}\,.$$

(a) Untersuchen Sie die Reihe auf punktweise Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion.

(b) Konvergiert die Reihe absolut ?

Hausübung

Die Hausaufgaben H1und H2 sind als Präsentationsaufgaben geeignet!

Aufgabe H1 (3+4 Punkte)

Gegeben sei die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \frac{2x}{n}\, \mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}}, \quad x \in [0,1].$$

(a) Untersuchen Sie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(b) Bestimmen Sie

$$I_1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad I_2 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x 4 \text{ Punkte}$$

und vergleichen Sie die Ergebnisse. Gibt es dafür eine theoretische Erklärung?

Aufgabe H2 (9 Punkte)

Zeigen Sie, daß die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x+n}$ gleichmäßig konvergiert, jedoch nicht absolut.

[Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Teilsummen $\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n+1}}{x+n}$ über eine gerade Anzahl von Summanden].

Aufgabe H3 (3+1 Punkte)

Der folgende Satz ist als *Satz von Dini* bekannt:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine punktweise konvergente Funktionenfolge stetiger Funktionen mit Definitionsbereich D, die punktweise gegen eine Grenzfunktion f konvergiert. Wir nehmen zusätzlich an:

(a) Der Definitionsbereich D ist kompakt.

(b) Die Grenzfunktion f ist stetig.

(c) Die Konvergenz ist monoton, das heißt $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ für alle $x \in D$ und alle $n \in \mathbb{N}$ oder $f_n(x) \ge f_{n+1}(x)$ für alle $x \in D$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann konvergiert die Funktionenfolge sogar gleichmäßig gegen f.

i) Zeigen Sie, dass jede einzelne der Annahmen (a), (b) und (c) nötig ist, finden Sie also Beispiele für punktweise konvergente Funktionenfolgen, die nur eine der Bedingungen (a), (b) oder (c) verletzen und die nicht gleichmäßig konvergieren.

ii) Seien $f_n\colon [a,b] \to [0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, stetig und nehmen wir an, dass $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ punktweise konvergiert mit stetiger Grenzfunktion f.
Zeigen Sie: Die Reihe konvergiert gleichmäßig.