Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
29.10.2009

3. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Hilfreich für diese Übung:

Majorantenkriterium für uneigentliche Riemann-Integrale

Es seien $f : [\,0,\infty\,) \to [\,0,\infty\,)$ und $g : [\,0,\infty\,) \to [\,0,\infty\,)$ Funktionen, welche über $[\,0,b\,]$ Riemann-integrierbar sind, für alle $0 < b$. Gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle genügend große x und konvergiert das uneigentliche Riemann-Integral $\int_0^\infty g(x)\,dx$, so konvergiert auch $\int_0^\infty f(x)\,dx$.

Beweis: siehe H3

Aufgabe G1

Konvergiert das uneigentliche Integral? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$

e) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x\cdot(\ln(x))^\alpha}\,dx$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe G2

Wir betrachten die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der durch

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 \cdot x & \text{falls } x \leq \frac{1}{n} \\ n - n^2\cdot(x-\frac{1}{n}) & \text{falls } \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{falls } x > \frac{2}{n} \end{cases}$$

definierten “Zackenfunktionen” $f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie f_1 und f_2.

(b) Zeigen Sie, daß die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ punktweise konvergiert. Bestimmen Sie die durch $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ definierte Grenzfunktion f. Ist die Konvergenz gleichmäßig?

Aufgabe G3

Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomfunktionen konvergiere auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß auch f eine Polynomfunktion ist.

Hausübung

Die Hausaufgaben H1b), H2 und H3 sind als Präsentationsaufgaben geeignet!

Aufgabe H1 (9 Punkte)

Durch

$$x = a \cdot \cos^3(t), \quad y = a \cdot \sin^3(t) \qquad\qquad \text{mit } a > 0,\ 0 \le t \le 2\pi$$

wird eine Astroide in Parameterdarstellung gegeben.

a) Machen Sie eine Skizze.

b) Leiten Sie mit Hilfe von partieller Integration eine Rekursionsformel für $V_n = \int \sin^n(x)\,dx$ her.

c) Berechnen Sie den Inhalt der durch die Astroide begrenzten Fläche.

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Die gegebenen Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ konvergieren punktweise. Berechnen Sie die Grenzfunktion f und entscheiden Sie, ob die Folge f_n gleichmäßig gegen f konvergiert.

(a) $f_n(x) := \dfrac{x}{1+nx}$,

(b) $f_n(x) := \dfrac{1}{1+nx}$,

(c) $f_n(x) := \dfrac{nx}{1+n^2x}$.

Aufgabe H3 (4 Punkte)

Beweisen Sie das Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale.