Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Nada Sissouno
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
11.02.2010

15. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Wir betrachten die Menge $G := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^4 + z^6 \leq 1\}$ und das Vektorfeld

$$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \qquad F(x,y,z) \;:=\; \big(x^2y^3,\, xz + xy^4,\, \cos(xy)\big)\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass G ein C^1-Normalbereich ist.

(b) Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\int_{\partial G} F \cdot N \, d\sigma.$$

Hierbei ist $N : \partial K \to \mathbb{R}^3$ das äußere Normalenfeld von G.

Aufgabe G2

Berechnen Sie den Fluss $\int_{\partial B} F \cdot N \, d\sigma$ des Vektorfeldes

$$F(x,y,z) = (xy^2, x^2y, y)$$

durch die Oberfläche des Zylinderabschnitts $B = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$ und Bestimmen Sie die Quellpunkte von F.

Aufgabe G3

Es sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Für $r > 0$ bezeichne K_r die abgeschlossene Kugel vom Radius r um x_0. Wir betrachten den Fluss

$$\Phi_r := \int_{\partial K_r} F \cdot N \, d\sigma$$

von F durch die Sphäre ∂K_r vom Radius r um x_0.

Zeigen Sie mit dem Gaußschen Integralsatz, dass

$$\lim_{r \to 0} \frac{\Phi_r}{|K_r|} \;=\; \operatorname{div} F(x_0)\,.$$

Hinweis: Schreiben Sie $\operatorname{div} F(x_0) = \frac{1}{|K_r|} \int_{K_r} \operatorname{div} F(x_0) \, dx$.

Aufgabe G4

Es sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

(a) F ist "quellenfrei," d.h. es ist $\operatorname{div} F = 0$.

(b) Für jeden C^1-Normalbereich $G \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt

$$\int_{\partial G} F \cdot N \, d\sigma = 0 \, .$$