



14. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Untersuche, für welche $\alpha > 0$ das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_{B_1(0)} r^{-\alpha} d(x, y, z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{B_1(0) \setminus \text{int}(B_\varepsilon(0))} r^{-\alpha} d(x, y, z)$$

(mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und $B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 \leq R\}$) existiert. Berechne gegebenenfalls den Wert des Integrals.

Aufgabe G2

Skizzieren Sie die Menge B und berechnen Sie ihr Volumen:

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \geq x^2 + y^2 \text{ und } 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}.$$

Aufgabe G3

Finden Sie eine geeignete Variablensubstitution, um die Fläche von dem Gebiet A in \mathbb{R}^2 zu bestimmen, das zwischen den Parabeln $y = x^2$ und $y = 2x^2$ und den Parabeln $x = y^2$ und $x = 3y^2$ liegt.

Aufgabe G4

Die Mantelfläche eines Kugelsegments ist gegeben durch

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = 1 - x^2 - y^2, \frac{1}{2} \leq z \leq 1\}.$$

- (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt von \mathcal{F} .
- (b) Eine stationäre Strömung werde durch das Vektorfeld w mit

$$H(x, y, z) = (y, -x, z)^T$$

beschrieben. Berechnen Sie den Fluß von H durch \mathcal{F} , d.h. das Integral

$$\iint_{\mathcal{F}} H \cdot d\vec{\sigma}.$$